

УДК: [004.4+514.1+513.3]

## КОНСТРУКТИВНІ ВЛАСТИВОСТІ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ПАРАБОЛОЇДУ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ПРИ КОМП'ЮТЕРНОМУ МОДЕЛЮВАННІ

Анпілогова В.О., к.т.н.,

[v.anpilogova.prof@gmail.com](mailto:v.anpilogova.prof@gmail.com), ORCID: 0000-0002-5838-1120

Ботвіновська С.І., д.т.н.,

[botvinovaka@ua.fm](mailto:botvinovaka@ua.fm), ORCID: 0000-0002-1832-1342

Левіна Ж.Г., к.т.н.,

[levina.zhg@knuba.edu.ua](mailto:levina.zhg@knuba.edu.ua), ORCID: 0000-0001-5833-719X

Суліменко А.Г., к.т.н.,

[asulimenko@i.ua](mailto:asulimenko@i.ua), ORCID: 0000-0002-2454-1675

*Київський національний університет будівництва і архітектури (Україна)*

*Постановка задачі, представлена у статті, на даний час є актуальною темою для комп'ютерного моделювання. Зокрема, для створення спеціальних моделей побудови квадрик та розв'язання задач, що пов'язані з аналізом форми поверхні й переходом від одного визначника поверхні до іншого (задачі перезадання визначника).*

*Об'єктом представленого дослідження виступає гіперболічний параболоїд, як одна з поверхонь, що широко застосовується в архітектурі у якості поверхні покриття. Основною метою роботи є перехід від завдання поверхні гіперболічного параболоїда чотирма відрізками, які утворюють просторову замкнену ламану, до його «канонічного» вигляду, тобто до: знаходження вершини, осі, площин симетрії та параметрів форми гіперболічного параболоїда.*

*У роботі доведено положення: якщо гіперболічний параболоїд  $\Gamma$  задано замкненою чотирьохланковою просторовою ламаною лінією ( $\{4\ell\}$  визначником), то пряма, що проходить через середини відрізків, які сполучають протилежні вершини цієї ламаної, паралельна осі заданого гіперболічного параболоїду  $\Gamma$ . Представлено алгоритми розв'язання трьох задач. За одним з них знайдено напрям осі гіперболічного параболоїда, заданого довільним  $4\ell$  визначником. За другим показано, як засобами комп'ютерної графіки довільний  $4\ell$  визначник може бути спроектований на площину паралелограмом. За третім алгоритмом можна знайти «канонічну» форми гіперболічного параболоїда, заданого довільним  $4\ell$  визначником.*

*Наведено приклади і означена мета подальшого розвитку роботи, а саме моделювання поверхні гіперболічного параболоїда за заданою лінією обрису.*

*Ключові слова: поверхні другого порядку, гіперболічний параболоїд, тетраedr, комп'ютерне моделювання.*

**Постановка проблеми.** Гіперболічний параболоїд – одна із найпоширеніших поверхонь, що застосовується в архітектурі у якості поверхонь покриття. У розвинених системах комп'ютерного моделювання, наприклад, таких як Solidworks поверхню гіперболічного параболоїда можна отримати при будь-якому завданні його визначника. Проте, навіть у самих розвинених комп'ютерних системах, неможливо без спеціальних методів розв'язувати задачі, які не входять до стандартних операцій, що здебільшого, обмежуються задачами перетину фігур та іншими задачами, які базуються на булевих операціях. До операцій, що не можуть бути виконані як стандартні, відносяться задачі аналізу форми та переходу від одного визначника до іншого (задачі перезадання визначника). Виконання комп'ютерних операцій спирається, зокрема, і на аналітичні методи, проте відповідний аналітичний опис об'єкта проектувальнику не відомий, принаймні, у поточний момент. Тому, всі конструктивні задачі мають розв'язуватись конструктивними методами, основою для яких є стандартний набір геометричних операцій.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Наведемо деякі властивості гіперболічного параболоїда, який будемо використовувати [1].

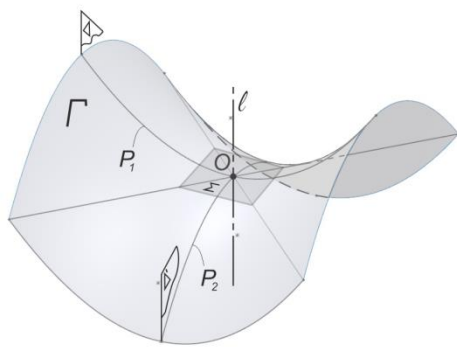


Рис. 1. Гіперболічний параболоїд

Вісь гіперболічного параболоїда – це пряма, по якій перетинаються дві його площини симетрії (рис. 1). У перетині площинами, що паралельні осі поверхні, отримуємо параболи, вісі всіх парабол паралельні осі параболоїда. Таких перерізів двопараметрична множина. Через кожен точку простору їх проходить однопараметрична множина. Парабола, що паралельна одній з площин симетрії має вершину на іншій площині симетрії і визначає твірну (напряму) параболу.

Побудувавши параболу, паралельну іншій площині симетрії отримуємо напрямну (твірну) поверхні. У цьому разі гіперболічний параболоїд розглядається як поверхня переносу. Всі інші перерізи поверхні – гіперболи або пара прямих ліній. Таких гіпербол трипараметрична множина, а пар прямих – двопараметрична множина.

Взагалі, детальний огляд робіт за науковим напрямком який нас цікавить показав, що дуже багато досліджень пов'язано з комп'ютерним моделюванням поверхонь другого порядку [2-5].

Загальна постановка розв'язання задачі комп'ютерного моделювання побудови поверхонь другого порядку за їх лініями обрису запропонована у роботі [6, 7]. Конкретні алгоритми запропоновано у роботах [8, 9] автори пропонують спосіб геометричного моделювання об'єкта з використанням особливостей квадрик і, пропонують шляхи моделювання об'єктів по заданих лініях обрису, пропонують алгоритми комп'ютерної

реалізації на основі конструктивних геометричних досліджень огортаючих конусів.

Інструментарій прикладної геометрії лежить в основі геометричного моделювання різних криволінійних об'єктів та технічних поверхонь. Багато робіт пов'язано з вивченням властивостей гіперболічного параболоїда та побудовами на ньому [10, 11]. Відображенню точок площини на поверхні гіперболічного параболоїда присвячено роботу [12]. У роботі [13] автор запропонував спосіб відображення кривої 2-го порядку на поверхні гіперболічного параболоїда. Теоретичним питанням знаходження геодезичних ліній на поверхні гіперболічного параболоїда присвячено роботу [14]. Показано, що геодезичні лінії збігаються з прямолінійними твірними поверхні, а дві параболі, що розташовано у двох взаємно-перпендикулярних напрямках та проходять через вершину гіперболічного параболоїда також є геодезичними лініями.

У статті [15] розглядаються задачі комп'ютерного моделювання гіперболічного параболоїда. Запропоновано прямі алгоритми знаходження осі та центру гіперболічного параболоїда. Але, принаймні на прикладах, одна з площин паралелізму займає горизонтальне положення, що значно спрощує задачу знаходження напрямку осі гіперболічного параболоїда. Крім того, побудова напрямку осі, яка є визначальною при розв'язанні інших задач, має бути легкорезалізованою при інженерному завданні відсіку гіперболічного параболоїду, віддаленого від центра поверхні.

З аналізу представлених досліджень і публікацій можна зробити висновки, що існують спеціальні модулі-додатки, за допомогою яких у прийнятих класичних програмних комплексах можна розв'язувати задачі щодо дослідження властивостей кривих та поверхонь другого порядку.

**Формулювання цілей статті.** Розробити методи переходу від завдання поверхні гіперболічного параболоїда чотирма відрізками, які утворюють просторову замкнену ламану ( $\{4\ell\}$  визначник), до його «канонічного» вигляду, тобто до: знаходження вершини, осі, площин симетрії та параметрів форми поверхні.

При цьому необхідно розв'язати наступні задачі:

1. З'ясувати напрям осі гіперболічного параболоїда, заданого довільним  $\{4\ell\}$  визначником.
2. Показати, як засобами комп'ютерної графіки довільний  $\{4\ell\}$  визначник може бути спроектований на площину паралелограмом.
3. Розробити алгоритм знаходження «канонічної» форми гіперболічного параболоїда, заданого довільним  $\{4\ell\}$  визначником.

**Основна частина.** Доведемо справедливості наступного положення.

*Положення 1.* Якщо гіперболічний параболоїд  $\Gamma$  задано замкненою чотирьохланковою просторовою ламаною лінією ( $\{4\ell\}$  визначником), то пряма, що проходить через середини відрізків, які сполучають протилежні вершини цієї ламаної, паралельна осі заданого гіперболічного параболоїду  $\Gamma$ .

Довільний тетраедр з вершинами  $A, B, C, D$  (рис. 2) визначає трійку замкнених просторових ламаних з фіксованим порядком вершин: I –  $(A, C, B, D, A)$ ; II –  $(A, B, C, D, A)$ ; III –  $(A, B, D, C, A)$ . Всього на тетраедрі є три пари мимобіжних ребер, призначимо їх так:  $a' = AC$ ;  $a'' = BD$ ;  $b' = AD$ ;  $b'' = CB$ ;  $c' = AB$ ;  $c'' = CD$ .

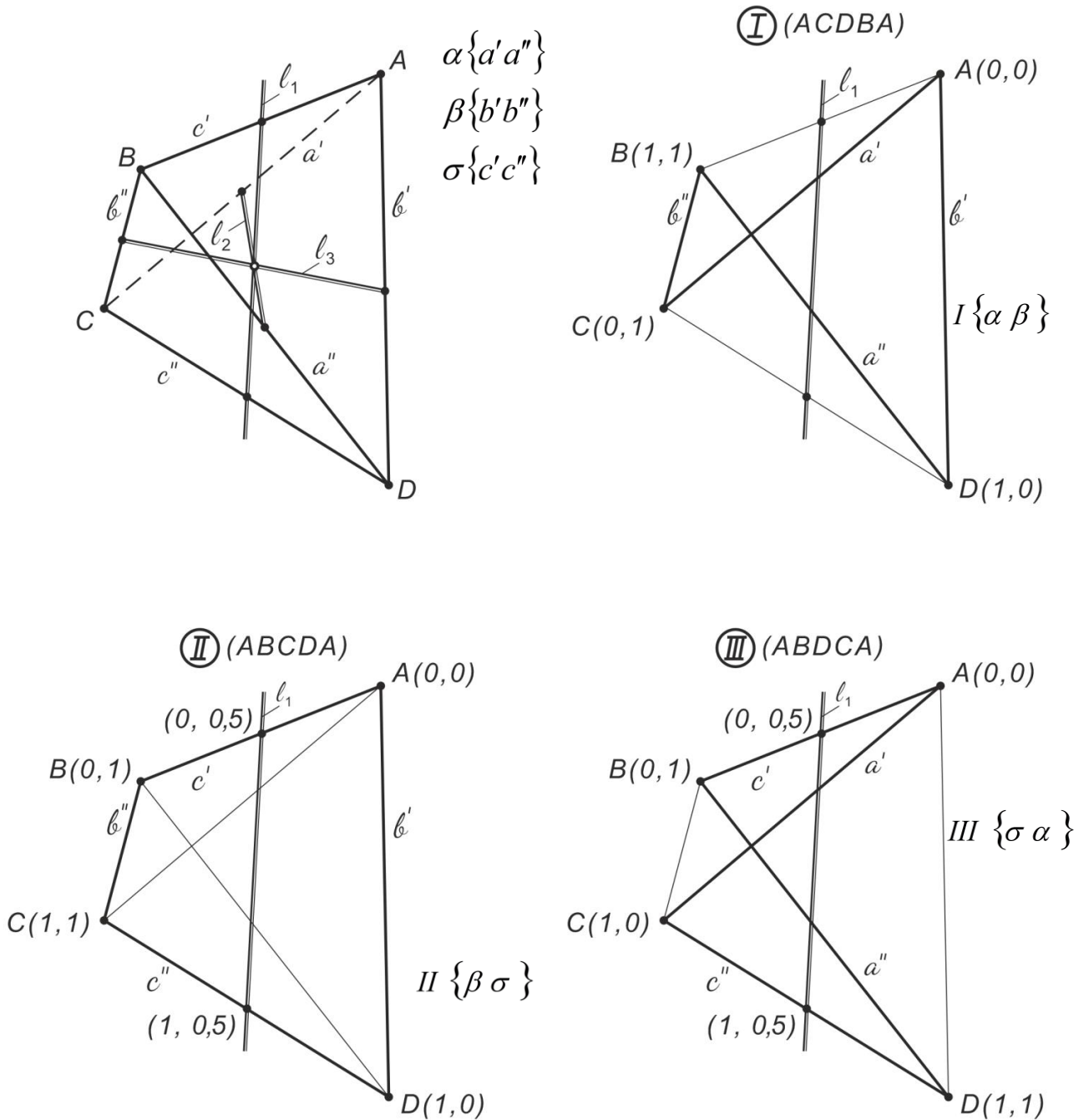


Рис. 2. Визначення напрямку осі гіперболічного параболоїда, заданого просторовою замкненою ламаною

Вони задають три площини паралелізму  $\alpha\{a'a''\}$ ,  $\beta\{b'b''\}$  та  $\sigma\{c'c''\}$ , які пов'язані з трьома гіперболічними параболоїдами:  $I\{\alpha\beta\}$ ,  $II\{\beta\sigma\}$ ,  $III\{\sigma\alpha\}$ .

Визначимо на всіх трьох гіперболічних параболоїдах прямі  $l_1, l_2, l_3$ , які з'єднують середини протилежних ребер тетраедра. Крім того на кожному з гіперболічних параболоїдів налаштуємо білінійну параметризацію  $(u, v)$ , де  $u \in [0, 1]$ ,  $v \in [0, 1]$ . Для доведення положення обрано перший I  $(A, C, B, D, A)$  гіперболоїд, визначники якого позначено потовщеними лініями.

Розглянемо пару параболоїдів I та II. Обрані параболоїди мають спільну площину симетрії  $\beta\{b'b''\}$ . На другому прикладі пряма  $l_1$ , що проходить через точки з параметрами  $(0, 0,5)$  та  $(1, 0,5)$  паралельна площині паралелізму  $\beta$  як така, що належить другому гіперболічному параболоїду. На першому гіперболоїді – це просто пряма, яка проходить через середини відрізків. Вона не належить першому гіперболічному параболоїду але паралельна площині  $\beta$ .

Якщо розглядати пару I – III, яка має спільну площину паралелізму  $\alpha\{a'a''\}$ , то точки з тими ж значеннями параметрів задають твірну III гіперболоїда, яка паралельна площині  $\alpha$ . Для I гіперболічного параболоїда це буде та сама пряма  $l_1$ , що і для першої пари I – II.

Тобто, через пряму  $l_1$  можна провести площину, паралельну площині  $\alpha$  і площину, паралельну площині  $\beta$ . Відповідно, пряма  $l_1$  є лінією перетину двох деяких площин, що паралельні площинам паралелізму  $\alpha$  та  $\beta$ . Але, якщо задано два сімейства паралельних площин  $\alpha$  і  $\beta$ , то всі площини з різних сімейств перетинатимуться по паралельним прямим.

Тобто, пряма  $l_1$  паралельна всім площинам, які паралельні площині паралелізму  $\alpha$  та площині паралелізму  $\beta$ . Але, як відомо (див. обґрунтування) при «канонічному» завданні гіперболічного параболоїда, всі площини паралелізму паралельні осі гіперболічного параболоїда. Це означає, що пряма  $l_1$ , що проходить через середини протилежних ребер визначника, паралельна напрямку осі гіперболічного параболоїда. Положення доведено.

Такі міркування можна повторити для кожного з трьох гіперболічних параболоїдів і отримати прямі  $l_2$  і  $l_3$ .

Прямі  $l_2$  і  $l_3$  належать I параболоїду, прямі  $l_1$  та  $l_3$  належать II гіперболічному параболоїду і прямі  $l_1$  і  $l_2$  належать III гіперболічному параболоїду. Кожна пара прямих визначає площину, і прямі  $l_i$  перетинаються у точці з параметрами  $(0,5, 0,5)$ . Кожна пара цих площин має спільну пряму, одну із  $l_i$ . Всі ці три площини перетинаються в одній точці, яка поділяє всі  $l_i$  навпіл.

Маємо доведеним і таке *положення 2*:

Прямі, що з'єднують протилежні ребра довільного тетраедра

перетинаються в одній точці і ця точка поділяє кожну з них навпіл. Проте таке положення є очевидним, оскільки воно, внаслідок симетрії, виконується для правильного тетраедра, а довільні чотири пари точок (вершин правильного та довільного тетраедрів) у просторі задають афінне перетворення простору. Тобто, довільний тетраедр може бути отриманий афінним перетворенням правильного чотиригранник, при цьому зберігаються властивості належності і пропорційності.

Результати *положення 1* дають можливість розв'язати цілу низку прикладних задач, серед яких оберемо дві.

Задача 1. Побудувати на відріку гіперболічного параболоїда, заданого замкненою просторовою ламаною лінією ( $\{4\ell\}$  визначником), сітку з парабол.

Відомо (див. аналіз літератури), що всі параболи, які належать заданому гіперболічному параболоїду мають діаметри, які паралельні осі гіперболічного параболоїда. Покажемо, як у випадку завдання гіперболічного параболоїда  $\{4\ell\}$  визначником провести через дві довільні точки, що не належать одній твірній, параболу.

Площина  $\Sigma$  (рис. 3) такої параболи визначається двома точками  $P_1$

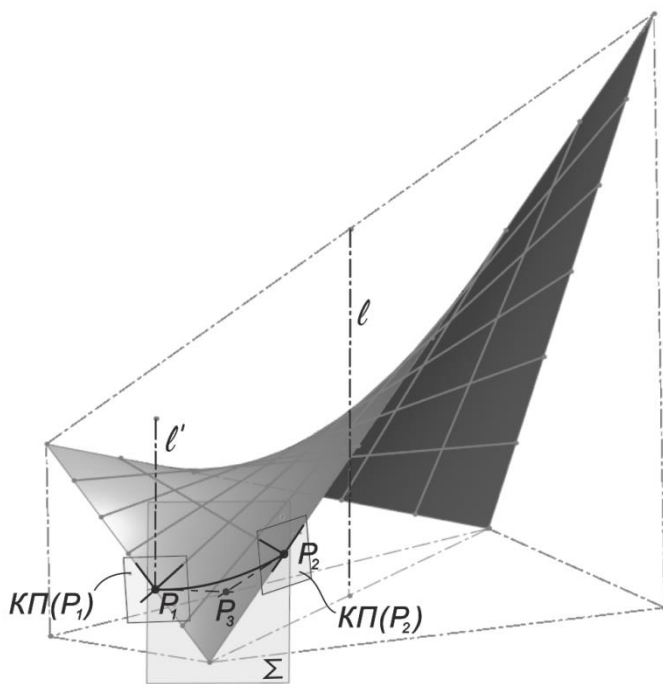


Рис. 3. Приклад знаходження параметрів гіперболічного параболоїда, необхідних для побудови сітки з парабол

та  $P_2$  і прямою лінією  $\ell'$ , паралельною прямій  $\ell$ , проведеної через одну із цих точок. У кожній із точок  $P_1$  ( $P_2$ ) маємо дотичні до гіперболічного параболоїда площини  $KП(P_1)$ ,  $KП(P_2)$ , які визначаються двома твірними, що проходять через задану точку. Перетинаючи площини  $KП(P_1)$  та  $KП(P_2)$  площиною  $\Sigma$  отримаємо дотичні прямі до шуканої параболи, які перетинаються у деякій точці  $P_3$ , що належить площині  $\Sigma$ . Цієї інформації достатньо для побудови параболи (незалежно яким методом, зокрема, як кривої Безьє, або способом інженерного дискримінанту тощо). На рис.

4 показано сітку з парабол  $p_i$  та  $p_j$ , проведених через точки твірних, що належать визначнику  $\{4\ell\}$  гіперболічного параболоїда і мають однакові значення параметрів  $u \in [0, 1]$ ,  $v \in [0, 1]$  і  $u = v$ .



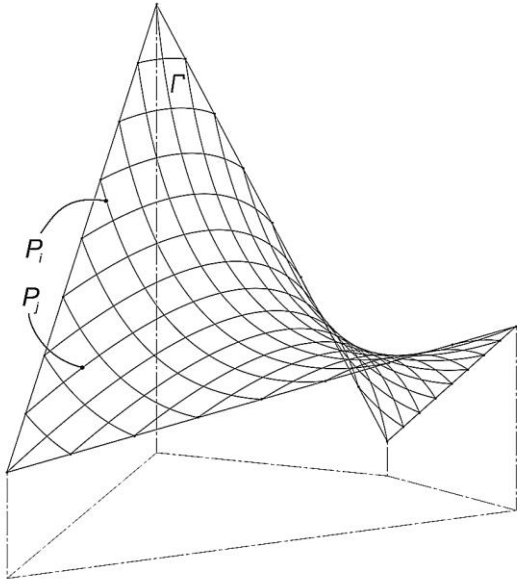


Рис. 4. Приклад нанесеної на поверхню гіперболічного параболоїда, заданого  $\{4\ell\}$  визначником, сітки з парабол

дотичної площини то, проектуючи довільну  $\{4\ell\}$  форму у напрямку прямої  $\ell$ , яка у цьому випадку буде перпендикулярною до головної дотичної площини, отримаємо як мінімум паралелограм (якщо параметри твірних парабол однакові він може бути квадратом або прямокутником, а якщо параметри твірних парабол різні, то ромбом або паралелограмом). Визначальним у цій задачі є напрям проєкціювання, а не головна дотична площина, бо проєкціюючи отриману на цій площині фігуру у напрямку  $\ell$  отримаємо, як мінімум паралелограм на довільній площині. Але тільки проєкція на площину, паралельну до головної дотичної площини, дозволяє розв'язати таку задачу, як визначення «канонічного» вигляду гіперболіда по  $\{4\ell\}$  визначнику. На рис. 5 представлено приклад проєкціювання  $\{4\ell\}$  визначника на площину, перпендикулярну до прямої  $\ell$ .

Задача 3. Визначити «канонічний» вигляд гіперболічного параболоїда, визначник якого задано  $\{4\ell\}$ , а саме: знайти реальне положення вершини гіперболічного параболоїда; вісі гіперболічного параболоїда; площин симетрії та параметри форми.

На площині, що паралельна головній дотичній площині при завданні  $\{4\ell\}$  визначника, симетричного відносно обох площин симетрії, при рівномірній параметризації будуть отримуватись чарунки у вигляді ромба або квадрата. Якщо, заданий за умовою задачі довільний  $\{4\ell\}$  визначник спроекціювався паралелограмом, то обираючи на ньому деякий кусок, такий щоб сторони його були рівними, і вводячи на ньому нову одиничну параметризацію  $u', v'$  отримаємо кусок, який належить вихідному гіперболічному параболоїду але має зручний для подальшої роботи вигляд.

Задача 2. Спроекціювати гіперболічний параболоїд, заданий довільним  $\{4\ell\}$  визначником так, щоб чотирикутник  $\{4\ell\}$  був, як мінімум, паралелограмом.

На площині, паралельній головній дотичній площині, проєкції твірних, заданих довільним  $\{4\ell\}$  визначником утворюють паралелограми, ромби, прямокутники чи навіть квадрати. Це залежить від форми  $\{4\ell\}$  визначника та параметрів твірних парабол (параметрів форми гіперболічного параболоїда). Оскільки, всі площини паралелізму перпендикулярні до головної

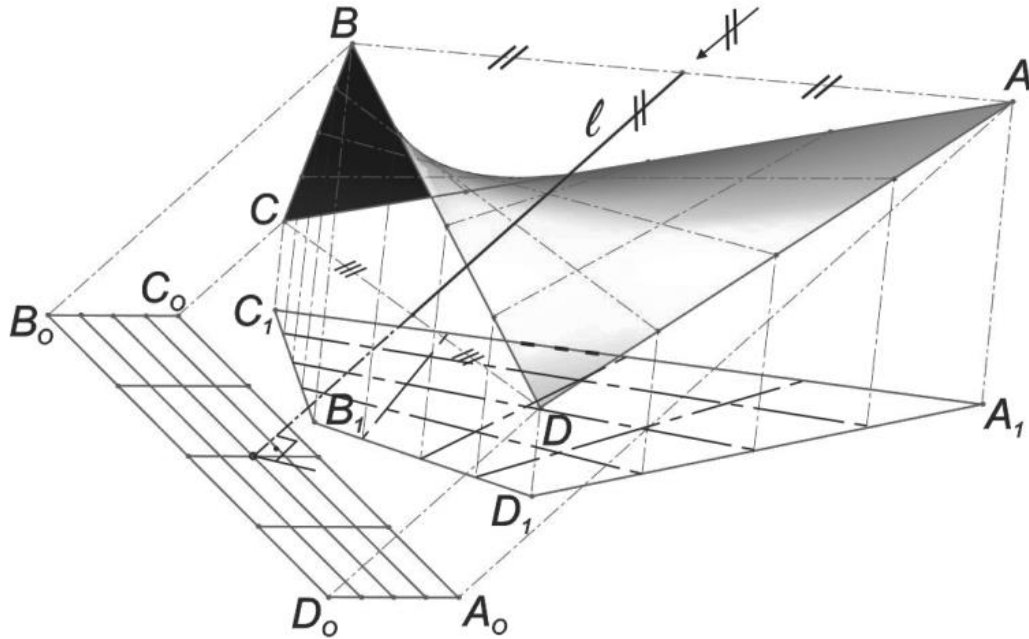


Рис. 5. Приклад проєкціювання  $\{4\ell\}$  визначника на площину, перпендикулярну до осі гіперболічного параболоїда

Діагональні напрямки такого ромбу паралельні площинам симетрії заданого гіперболоїда. Дійсне положення площин симетрії визначаємо за допомогою спеціального алгоритму, який базується на побудовах парабол у послідовності, яку зображено на рис. 6.

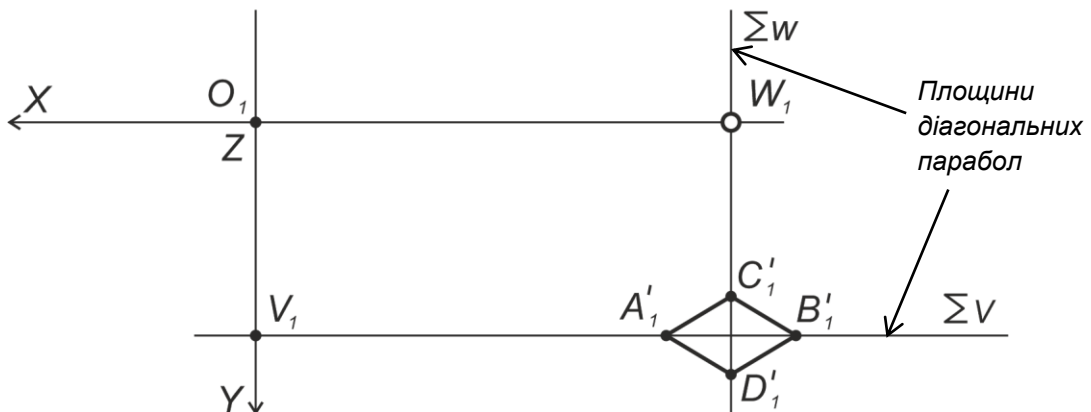


Рис. 6. Схема до алгоритму знаходження параметрів форми та осі гіперболічного параболоїда, заданого  $\{4\ell\}$  визначником

$A'B'C'D'$  – перетворений  $\{4\ell\}$  визначник, який втім повністю визначає вихідну поверхню. Припустимо, що є деяка місцева система координат  $xOyz$ , у якій рівняння заданого гіперболічного параболоїда приймає канонічний вигляд. Маємо центром шукану точку  $O$ . Тоді, його площини симетрії  $xOz$  та  $Oyz$  визначаються як паралельні діагоналям ромба  $A'B'C'D'$  (на рис. 6 зображено проєкцію  $A_1'B_1'C_1'D_1$  цього



чотирикутника на головну дотичну площину). За алгоритмом задачі 1 у площині  $\Sigma_v$ , що проходить через одну з діагоналей ромба (лінія  $A_1' B_1'$ ), будуюмо параболу. Вона проходить через точку  $A_1'$  та точку  $B_1'$ , у яких визначено дотичні. Вершина цієї параболи  $V$ , яку знаходимо за будь-яким графічним алгоритмом, наприклад, [3], буде належати площині симетрії  $zOy$ . На рис. 6. показано проекція точки  $V$  ( $V_1$ ) на головну дотичну площину. Аналогічно, площина  $\Sigma_w$  визначає параболу, що проходить через точки  $C$  та  $D$ . Після знаходження її вершини, точки  $W$  (на рис. 6 показано її проекція  $W_1$  на головну дотичну площину), маємо положення площини симетрії  $xOz$ , яка проходить через точку  $W$  паралельно площині  $\Sigma_v$ . Проводячи у свою чергу площину, що проходить через точку  $V$ , паралельно площині  $\Sigma_w$  отримаємо площину  $Oyz$ , а тому і дійсне положення осі гіперболічного параболоїда, а також точку  $O$ . Параболи, які лежать у площинках симетрії мають визначену вісь, а сама вісь  $Oz$  і буде віссю парабол.

Параболи, які ми отримали в означених площинах  $\Sigma_v$  та  $\Sigma_w$  - це не довільні параболи, а параболи, які дорівнюють напрямним параболом гіперболічного параболоїда. Параметри форми цих парабол і будуть параметрами форми гіперболічного параболоїда.

**Висновки.** Доведене положення про те, що пряма, яка проходить через середини відрізків, що з'єднують протилежні вершини замкненої просторової чотириланкової ламаної ( $\{4\ell\}$  визначника), паралельна осі гіперболічного параболоїда, який задається цією ламаною, допомагає розв'язувати низку конструктивних задач. Кінцевою метою цих задач є визначення головних конструктивних параметрів методами комп'ютерної графіки. Частина цих задач розглянуто у цій статті, а подальшою метою є моделювання поверхні гіперболічного параболоїда за заданими лініями обрису. Та знаходження алгоритмів визначення білінійних параметрів точки гіперболічного параболоїда, яка задана декартовими координатами на плані.

### *Література*

1. Михайленко В.Е., Обухова В.С., Подгорний А.Л. Формообразование оболочек в архитектуре. Киев : Будівельник, 1972. 208 с.
2. Хейфец А.Л. Алгоритмы 3D-компьютерного геометрического моделирования на примере задачи совмещения коники с квадрикой. *Вестник ЮУрГУ, серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника»*. Челябинск : изд-во ЮУрГУ. Выпуск 3, 2012. С. 57-62.
3. Короткий В.А. Формообразование линий и поверхностей на основе кривых второго порядка в компьютерном геометрическом моделировании : дис. ... доктора техн. наук: 05.01.01. Нижний новгород : НГАСУ, 2018. 323 с.
4. V. Korotkiy. Construction of a Nine-Point Quadric Surface. *Journal for*

- Geometry and Graphics. Austria, Volume 22 (2018), No. 2, 183-193. <http://dgng.pstu.ru/conf2019/papers/51/>.
5. Короткий В.А., Усманова Е.А. Кривые второго порядка на экране компьютера. Геометрия и графика. 2018. Т. 6. №. 2. С. 101-113. DOI 10.12737/issn.2308-4898.
  6. Суліменко С.Ю. Конструктивно-параметричний аналіз формоутворення еліпсоїдів за їх лініями обрисів. *Сучасні проблеми архітектури та містобудування*. Київ, КНУБА. 2016. Вип. 42. С.109–115.
  7. Сазонов К.О., Суліменко Г.Г., Суліменко С.Ю. Комплексний аналіз задачі моделювання об'єктів дизайну за лініями обрису поверхонь обертання. *Сб. статей по матеріалам II міжнародній конференції «Інноваційні технології в науці та освіті. Європейський досвід»* 12 листопада-15 листопада 2018 р., Університет Аалто Гельсінкі (Фінляндія), 2018. С. 220-226.
  8. Ботвіновська С.І., Васько С.М., Суліменко Г.Г. Особливості комп'ютерного моделювання об'єктів архітектури та дизайну до складу яких входять поверхні обертання другого порядку. *Управління розвитком складних систем*. Київ. КНУБА, 2019. № 40. С. 102–111. <http://urss.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-40/15.pdf>.
  9. Anpilogova V., Botvinovska S., Zolotova A., Sulimenko H., Study of the problem on constructing quadrics at the assigned tangent cones / Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Engineering technological systems. Vol 5, No 1 (101) (2019). 39-48. doi.org/10.15587/1729-4061.2019.180859.
  10. Suzuki, K. Traditional Descriptive Geometry Education in the 3D-CAD/CG Era. *Journal for Geometry and Graphics*. Austria, Volume 18 (2014), No. 2, p. 249–258.
  11. С.П. Семенець, Семенець Л.М. Деякі методичні аспекти вивчення поверхонь другого порядку вузівського курсу геометрії. *Освітні інноваційні технології у процесі викладання навчальних дисциплін*: зб. наук.-метод. праць. Житомир, 2004. С. 193–202.
  12. Ванін В.В., Павлов О.В. Відображення точок площини на поверхню гіперболічного параболоїда. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 1999. Вип. 66, С. 37-38.
  13. Ванін В.В., Павлов О.В. Відображення кривої другого порядку на поверхню гіперболічного параболоїда. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. Київ : КНУБА, 2001. Вип. 68, С. 16-18.
  14. Пилипака С.Ф., Кременець Я.С. Побудова геодезичних ліній на поверхні гіперболічного параболоїда. *Праці ТДАТУ*, 2011. Випуск 4, Т. 49, С. 62-69. [http://base.dnsgb.com.ua/files/journal/PTDAU/PTDAU2011\\_v4\\_t49/PTDAU2011\\_v4\\_t49-62-69.pdf](http://base.dnsgb.com.ua/files/journal/PTDAU/PTDAU2011_v4_t49/PTDAU2011_v4_t49-62-69.pdf)
  15. Хейфец А.Л., Логиновский А.Н. 3D-модели линейчатых поверхностей с тремя прямолинейными направляющими. *Вестник ЮУрГУ, серия «Строительство и архитектура»*. Челябинск: изд-во ЮУрГУ. Выпуск

7, № 25, 2008. С. 51-56.

## **КОНСТРУКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В КОМПЬЮТЕРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ**

Анпилогова В.А., Ботвиновская С.И., Левина Ж.Г., Сулименко А.Г.

*Постановка и решение представленной в статье задачи, является актуальной темой в компьютерном моделировании. В частности, для создания специальных моделей построения квадрик и решения задач, связанных с анализом формы поверхности и переходом от одного определителя поверхности к другому (задачи смены определителя поверхности).*

*Объектом представленного исследования выступает гиперболический параболоид, как одна из поверхностей, широко применяемых в архитектуре в качестве оболочки покрытия большепролетных сооружений. Основной целью работы является переход от представления поверхности гиперболического параболоида четырьмя отрезками, которые образуют пространственную замкнутую ломаную, к его «каноническому» виду, то есть к нахождению его вершины, оси, плоскостей симметрии и параметров формы гиперболического параболоида.*

*В работе доказано положение: если гиперболический параболоид  $\Gamma$  задан замкнутой пространственной ломаной линией из четырех отрезков ( $\{4\ell\}$  определителем), то прямая, проходящая через середины отрезков, соединяющих противоположные вершины этой ломаной, параллельная оси заданного гиперболического параболоида  $\Gamma$ . Представлены алгоритмы решения трех задач. По одному из алгоритмов можно найти направление оси гиперболического параболоида, заданного произвольным определителем. По второму показано, как средствами компьютерной графики произвольный определитель может быть спроектирован на плоскость параллелограммом. По третьему алгоритму можно найти «каноническую» форму гиперболического параболоида, заданного произвольным  $\{4\ell\}$  определителем.*

*Представлены примеры и обозначена цель дальнейшего развития работы, а именно моделирование поверхности гиперболического параболоида по заданной линии очертания.*

*Ключевые слова: поверхности второго порядка; гиперболический параболоид; тетраэдр; компьютерное моделирование.*

## **DESIGN PROPERTIES OF HYPERBOLIC PARABOLOID AND THEIR APPLICATION IN COMPUTER MODELING**

*Vera Anpilogova, Svitlana Botvinovska, Janna Levina, Anna Sulimenko*

*Setting and solving the problem presented in the article is a relevant topic in computer modeling. In particular, to create special models for building quadrics and solve problems associated with analyzing the shape of a surface and switching from one surface determinant to another (surface determinant change problems)*

*The object of the presented study is a hyperbolic paraboloid, as one of the surfaces widely used in architecture as a coating shell for large-span structures. The main goal of the work is to transition from representing the surface of a hyperbolic paraboloid with four segments that form a spatial closed broken to its "canonical" form, that is, to finding its vertex, axis, symmetry planes and shape parameters of the hyperbolic paraboloid.*

*In the work, the position is proved: if the hyperbolic paraboloid  $\Gamma$  is given by a closed spatial broken line of four segments (determinant), then the line passing through the middle of the segments connecting the opposite vertices of this broken line is parallel to the axis of the given hyperbolic paraboloid  $\Gamma$ .*

*Algorithms for solving three problems are presented. By one of the algorithms, you can find the direction of the axis of the hyperbolic paraboloid specified by an arbitrary determinant. The second shows how, by means of computer graphics, an arbitrary determinant can be designed onto a plane by a parallelogram. According to the third algorithm, you can find the "canonical" form of a hyperbolic paraboloid given by an arbitrary determinant.*

*Examples are presented and the purpose of further development of the work is indicated, namely modeling the surface of a hyperbolic paraboloid along a given line of outline.*

*Key words: quadric; hyperbolic paraboloid; tetrahedron; computer simulation.*

### **References**

1. Mihajlenko V.E., Obuhova V.S., Podgornij A.L. (1972). Forming shells in architecture. Kiev : Budivelnyk [in Russian]
2. Hejfec A.L. (2012) Algorithms of 3D computer geometric modeling on the example of the task of combining a konik with a quadric. *Vesnik JuUrGU, serija «Komp'juternie tehnologii, upravlenie, radioelektronika»*. Cheljabinsk : izd-vo JuUrGU. Vypusk 3, 57-62. [in Russian]
3. Korotkij V. A. (2018). Form-forming sheds and crosses on the basic curves of the same order in the computer geometrical modeling. Doctor's thesis. Nizhnij novgorod : NGASU [in Russian].
4. Korotkiy V. (2018). Construction of a Nine-Point Quadric Surface. *Journal for Geometry and Graphics*. Austria, Vol. 22 (2), 183-193. <http://dgng.pstu.ru/conf2019/papers/51/> [in Russian].

5. Korotkij V.A., Usmanova E.A. (2018). Second-order curves on a computer screen. *Geometrija i grafika*, 6. (2), 101-113. DOI 10.12737/issn.2308-4898 [in Russian].
6. Sulimenko S.Iu. (2016). Structural and parametric analysis of the formation of ellipsoids along their outline lines. *Suchasni problemy arkhitektury ta mistobuduvannia*. Kyiv : KNUBA, Vol. 42, 109–115 [in Ukrainian].
7. Sazonov K.O., Sulimenko H.H., Sulimenko S.Iu. (2018). *Complex analysis of the problem of modeling design objects by the lines of outline of the surfaces of rotation. Sb. statei po materialam II mizhnarodnii konferentsii «Innovatsiini tekhnolohii v nautsi ta osviti. Yevropeiskyi dosvid» 12 lystopada-15 lystopada 2018, Universytet Aalto Helsinki (Finliandiia)*, 220-226 [in Ukrainian].
8. Botvinovska S.I., Vasko S.M., Sulimenko H.H. (2019). *Features of computer modeling of objects of architecture and design, which include the surfaces of rotation of the second order. Upravlinnia rozvytkom skladnykh system*. Kyiv : KNUBA, vol. 40, 102–111. <http://urss.knuba.edu.ua/files/zbirnyk-40/15.pdf> [in Ukrainian].
9. Anpilogova V., Botvinovska S., Zolotova A., Sulimenko H. (2019). Study of the problem on constructing quadrics at the assigned tangent cones. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Engineering technological systems*. Vol 5, No 1 (101), 39-48. doi.org/10.15587/1729-4061.2019.180859 [in Ukrainian].
10. Suzuki, K. (2014) Traditional Descriptive Geometry Education in the 3D-CAD/CG Era. *Journal for Geometry and Graphics*. Austria, 18(2), 249–258 [in English].
11. Semenets S., Semenets L. (2004). Some methodical aspects of studying the surfaces of the second order of the university course of geometry. *Osvitni innovatsiini tekhnolohii u protsesi vykladannia navchalnykh dystsyplin: zb. nauk.-metod. prats. Zhytomyr*, 193–202 [in Ukrainian].
12. Vanin V.V., Pavlov O.V. (1999). Displays the second-order curve to the surface of the hyperbolic paraboloid. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika : Mizhvidomchyi naukovo-tekhnichnyi zbirnyk*. Kyiv : KNUBA, 66, 37-38 [in Ukrainian].
13. Vanin V.V., Pavlov O.V. (2001). Displays the second-order curve to the surface of the hyperbolic paraboloid. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika : Mizhvidomchyi naukovo-tekhnichnyi zbirnyk*. Kyiv : KNUBA, 68, 16-18 [in Ukrainian].
14. Pylypaka S.F., Kremenets Ya.S. (2011). Construction of geodetic lines on the surface of a hyperbolic paraboloid. *Pratsi TDATU*. Vol. 4, № 49, 62-69. [http://base.dnsgb.com.ua/files/journal/PTDAU/PTDAU2011\\_v4\\_t49/PTDAU2011\\_v4\\_t49-62-69.pdf](http://base.dnsgb.com.ua/files/journal/PTDAU/PTDAU2011_v4_t49/PTDAU2011_v4_t49-62-69.pdf) [in Ukrainian].
15. Hejfec A.L., Loginovskij A.N. (2008). 3D models of linear surfaces with three straight guides. *Vesnik JuUrGU, serija «Stroitel'stvo i arhitektura»*. Cheljabinsk : izd-vo JuUrGU. 7(25), 51-56 [in Russian].