

УДК 514.18

**ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАКОНОМІРНОСТЕЙ ЗМІНИ ВЕЛИЧИН
КОЕФІЦІЄНТІВ СУПЕРПОЗИЦІЇ ОДНОВИМІРНИХ
ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ НА ПРИКЛАДІ
ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ**

Воронцов О.В., к.т.н.,

voronoleg6163@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7339-9196

Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія
Кондратюка» (Україна),

Воронцова І.В., к.пед.н.,

ira061061@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9131-2816

Полтавський коледж нафти і газу Національного університету
«Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка» (Україна)

В сучасних умовах при проектуванні споруд, мереж, виробів значне місце займає етап побудови та аналізу геометричних моделей об'єктів, процесів та певних явищ.

Важливою проблемою є створення нових способів конструювання ліній і поверхонь геометричних образів (ГО), що у повній мірі відповідають меті автоматизованого проектування і відтворення.

Статико-геометричний метод дискретного геометричного моделювання кривих ліній і поверхонь дозволяє отримати дискретні каркаси криволінійних поверхонь під дією зовнішнього формоутворюючого навантаження та, крім того, є простим й наочним. Використання статико-геометричного методу дозволяє отримати дискретні каркаси криволінійних поверхонь на довільному опорному контурі. Одночасно слід відзначити, що в основу апарату статико-геометричного методу покладено розв'язок громіздких систем лінійних рівнянь, який не дає інформацію про геометричні властивості і особливості локальних ділянок моделі.

У статті пропонується застосування геометричного апарату суперпозицій у поєднанні із статико-геометричним методом дискретного геометричного моделювання, що дозволяє істотно підвищити ефективність та розширити можливості процесу дискретного моделювання ГО.

На основі геометричного апарату суперпозицій досліджено закономірності зміни величин коефіцієнтів суперпозиції трьох довільно заданих вузлових точок поліноміальних функцій.

Дані дослідження визначають загальний підхід до одержання подібних закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції трьох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок для визначення координат n точок модельованих будь-яких одновимірних

функціональних залежностей та довільних одновимірних множин точок.

На прикладі поліноміальних функції показано, що одержані формули обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції заданих трьох вузлових точок для обраних розрахункових схем, дозволяють розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції числовими послідовностями будь-яких одновимірних функціональних залежностей (визначати ординати шуканих точок дискретних кривих за трьома заданими ординатами вузлових точок) без трудомістких операцій складання та розв'язання великих систем лінійних рівнянь.

Ключові слова: дискретне моделювання, геометричні образи, статико-геометричний метод, геометричний апарат суперпозицій, поліноміальні функції.

Постановка проблеми. При формуванні дискретних моделей ГО статико-геометричним способом доводиться складати і розв'язувати великі системи лінійних рівнянь, де число рівнянь відповідає числу координат невідомих точок дискретного каркаса. При управлінні формою модельованої поверхні, зміна окремих параметрів поверхні вимагає повторної операції складання і вирішення таких систем. Дискретне моделювання неперервних образів статико-геометричним методом у більшості випадків пов'язано із певними похибками. Тому актуальним є дослідження щодо формування геометричних об'єктів із заданою точністю дискретної моделі при умові мінімального обсягу вихідної інформації. Це дозволить створювати моделі із раціональною дискретизацією. Подальший розвиток даного методу моделювання при умові раціонального зменшення обсягу вихідної інформації є актуальним, а запропонований напрям досліджень дозволить розкрити нові можливості його використання у різних галузях: будівництві, машинобудуванні, економіці та інших. Однією із задач даної роботи є продовженні досліджень визначення дискретних образів кривих ліній на основі класичного методу скінчених різниць, статико-геометричного методу моделювання і геометричного апарату суперпозицій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питанням застосування для дискретного моделювання ГО геометричного апарату суперпозицій в поєднанні з класичним методом скінчених різниць, статико-геометричним методом, математичним апаратом числових послідовностей присвячені роботи авторів даної статті [1, 2, 3, 4, 5].

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є дослідження закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції трьох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок у процесі дискретної інтерполяції поліноміальними функціями, що дозволить розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції даними функціями без трудомістких операцій складання та розв'язання великих систем лінійних рівнянь.

Основна частина. Згідно доведеної у роботі [1] Властивості 1, координати будь-якої точки одновимірної множини точок є суперпозицією координат трьох довільних точок цієї множини і виведено формули для визначення величин коефіцієнтів суперпозиції із системи рівнянь (1):

$$\begin{cases} x_0 - x_3 = k_1(x_1 - x_3) + k_2(x_2 - x_3) \\ y_0 - y_3 = k_1(y_1 - y_3) + k_2(y_2 - y_3) \end{cases}, \quad (1)$$

у вигляді (2):

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{(x_0 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_0 - y_3)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)}; \\ k_2 &= \frac{(x_1 - x_3)(y_0 - y_3) - (x_0 - x_3)(y_1 - y_3)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)}, \end{aligned} \quad (2)$$

де $x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, y_3$ – відомі числові параметри, k_1, k_2 – невідомі.

У задачах дискретної інтерполяції та екстраполяції невідомою величиною є ордината y_0 , тому розв'яжемо дану систему рівнянь, у якій відомими числовими параметрами будуть $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, k_1$, а y_0 , та, наприклад, k_2 – невідомі, або y_0 , та k_1 – невідомі.

Результатом такого розв'язку будуть формули 3 і 4:

$$\begin{aligned} y_0 &= k_1 y_1 + ((k_1(x_2 - x_1) + (x_0 - x_2))y_3 + (k_1(x_1 - x_3) + \\ &+ (x_3 - x_0))y_2)/(x_3 - x_2), \\ y_0 &= k_2 y_2 + ((k_2(x_1 - x_2) + (x_0 - x_1))y_3 + (k_2(x_2 - x_3) + \\ &+ (x_3 - x_0))y_1)/(x_3 - x_1); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= (k_2(x_2 - x_3) + (x_3 - x_0))/(x_3 - x_1), \\ k_2 &= (k_1(x_1 - x_3) + (x_3 - x_0))/(x_3 - x_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Дослідивши закономірності зміни величини коефіцієнта суперпозиції k_1 чи k_2 при моделюванні дискретних аналогів певних одновимірних числових послідовностей, зможемо розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції числовими послідовностями будь-яких одновимірних функціональних залежностей (визначати ординати шуканих точок дискретних кривих) без трудомістких операцій складання та розв'язання великих систем лінійних рівнянь.

Розглянемо, наприклад, процес формування дискретних аналогів поліноміальних функціональних залежностей.

Для вихідних умов числової послідовності $y_i = i^4$:

$$i + 1 = 0, i + 2 = 1, i + 3 = 2, i_0 = i + 4 = 3;$$

$$y_{i+1} = 0, y_{i+2} = 1, y_{i+3} = 16, y_0 = y_{i+4} = 81,$$

величини коефіцієнтів суперпозиції обчислені за формулами (2), матимуть значення: $k_1 = \frac{25}{7}$, $k_2 = -\frac{57}{7}$, $k_3 = \frac{39}{7}$.

Для перевірки вірності одержаних значень величин коефіцієнтів суперпозиції підставимо їх у формули (5):

$$y_0 = k_1 y_{i+1} + k_2 y_{i+2} + k_3 y_{i+3}, \quad (5)$$

де: $y_0 = y_{i+4}, y_{i+5}, y_{i+6}, y_{i+7}, \dots, y_{i+(n-1)}, y_{i+n}$;

$$y_0 = 81 = \frac{25}{7} \cdot 0 - \frac{57}{7} \cdot 1 + \frac{39}{7} \cdot 16 = 81.$$

Для тих же вихідних умов та: $i_0 = i + 5 = 4$, $y_0 = y_{i+5} = 256$, величини коефіцієнтів суперпозиції матимуть значення: $k_1 = \frac{105}{7} = 15$, $k_2 = -\frac{224}{7} = -32$, $k_3 = \frac{126}{7} = 18$;

І т.д.

Величини коефіцієнту суперпозиції k_1 : $k_1 = \frac{25}{7}, \frac{105}{7}, \frac{282}{7}, \frac{610}{7}, \frac{1155}{7}, \frac{1995}{7}, \frac{3220}{7}$, і величини k_2, k_3 являють собою числові послідовності, що, як і значення ординат числової послідовності $y_i = i^4$, описуються рекурентною формулою скінченої різниці 4-го порядку.

Тому достатньо мати п'ять членів послідовності для визначення її n членів.

Результати поліноміальної інтерполяції дискретного ряду величин коефіцієнту суперпозиції k_1 показано на рис. 1.

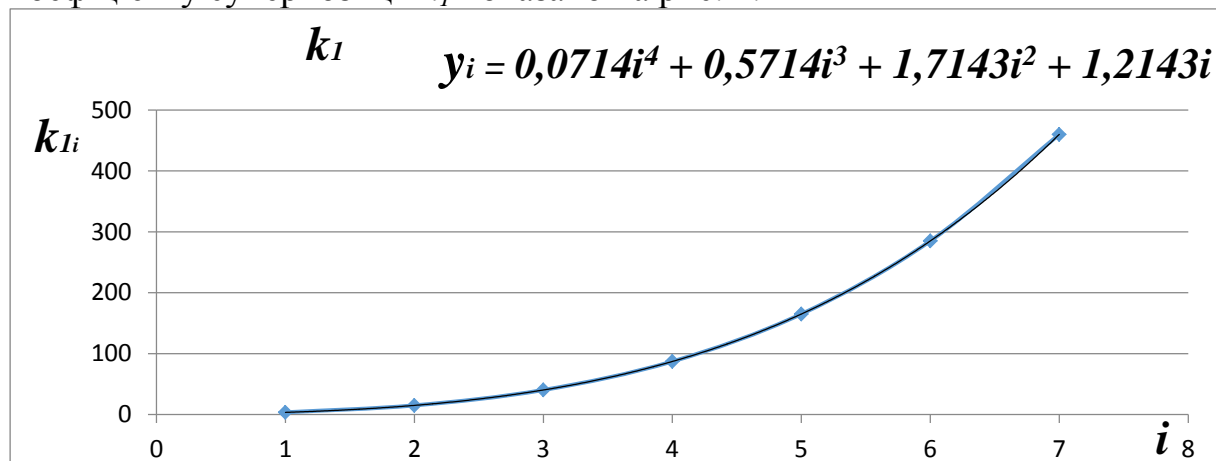


Рис. 1. Графік поліноміальної інтерполяції дискретного ряду значень коефіцієнту суперпозиції k_1 .

Таким чином, дискретний ряд значень величини коефіцієнту суперпозиції для числової послідовності n -го степеня (6):

$$y_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 + \dots + a_k i^k + \dots + a_n i^n, \quad (6)$$

описується рекурентною формулою скінченої різниці n -го порядку, або:

$$k_1 = \frac{1}{n+1}; \dots; k_{s+1} = (-1)^{s+1} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot C_n^s, \quad s \in N, 1 < s \leq n, \forall n \in N.$$

На підставі одержаних вище закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції трьох суміжних вузлових точок обчислимо дискретні значення вузлових точок числової послідовності n -го степеня (6), при $n=4$: $y_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + a_3 i^3 + a_4 i^4$, як суперпозиції трьох довільно заданих суміжних вузлових точок:

$$i + 1 = 3, i + 2 = 4, i + 3 = 5, ; y_{i+1} = 0, y_{i+2} = 3, y_{i+3} = 1 ,$$

$$k_1 = \frac{25}{7}, \frac{105}{7}, \frac{282}{7}, \frac{610}{7}, \frac{1155}{7}, \frac{1995}{7}, \frac{3220}{7} .$$

Отримані дискретні значення ординат модельованої кривої являють собою числову послідовність, що, як і значення ординат числової послідовності $y_i = a_0 + a_1i + a_2i^2 + a_3i^3 + a_4i^4$, описується рекурентною формулою скінченої різниці 4-го порядку і також є поліномом 4-го степеня.

Результати поліноміальної інтерполяції дискретного ряду ординат вузлових точок модельованої кривої показано на рис. 2.

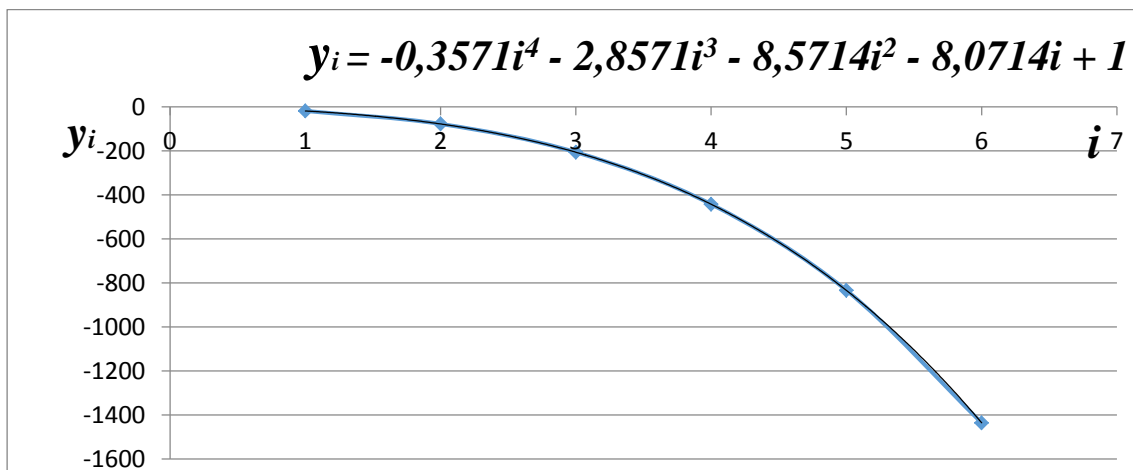


Рис. 2. Графік поліноміальної інтерполяції дискретного ряду ординат вузлових точок модельованої кривої

Для симетричних вихідних умов трьох несуміжних вузлових точок:

$$i_1 = -10, i_2 = 0, i_3 = 10 ; y_{i_1} = -1000, y_{i_2} = 0, y_{i_3} = 1000 ;$$

отримані подібні результати.

Висновки. У даній статті досліджено закономірності зміни величин коефіцієнтів суперпозиції трьох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок у процесі дискретної інтерполяції поліноміальними функціями. Дані дослідження визначають загальний підхід до одержання подібних закономірностей зміни величин коефіцієнтів суперпозиції трьох довільно заданих, як суміжних, так і не суміжних вузлових точок для визначення координат n точок модельованих будь-яких одновимірних функціональних залежностей та довільних одновимірних множин точок.

Перспективи подальших досліджень. На прикладі поліноміальних функцій показано, що одержані формули обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції заданих трьох вузлових точок для обраних розрахункових схем, дозволяють розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції та екстраполяції числовими послідовностями будь-яких одновимірних функціональних залежностей (визначати ординати шуканих точок дискретних кривих за трьома заданими ординатами вузлових точок) без

трудомістких операцій складання та розв'язання великих систем лінійних рівнянь.

Література

1. Воронцов О.В., Тулупова Л.О. Дискретное моделирование кривых поверхностей суперпозициями двумерных точечных множеств: сборник статей по материалам XL международной научно-практической конференции «Технические науки – от теории к практике». Новосибирск. №11 (36). 2014. С. 7 – 16. http://sibac.info/sites/default/files/archive/2014/2014.11.19_teh._nauki_pravka.pdf
2. Воронцов О.В., Воронцова И.В. Спосіб одновимірної дискретної інтерполяції за координатами трьох точок числових послідовностей на прикладі показникових функцій. *Прикладні питання математичного моделювання*. Херсон: ХНТУ, Т.3, №2.2. 2020. С. 35 – 43. <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.3>
3. Vorontsov O.V., Tulupova L.O., Vorontsova I.V. Discrete modeling of building structures geometric images. *International Journal of Engineering & Technology*. Vol. 7 No. 3.2. 2018. P. 727 – 731. DOI: [10.14419/ijet.v7i3.2.15467](https://doi.org/10.14419/ijet.v7i3.2.15467)
4. Vorontsov O.V., Tulupova L.O., Vorontsova I.V. Geometric and Computer Modeling of Building Structures Forms. *International Journal of Engineering & Technology*. №7 (4.8), Special Issue №8. 2018. Pages 560-565. DOI: [10.14419/ijet.v7i4.8.27306](https://doi.org/10.14419/ijet.v7i4.8.27306)
5. Vorontsov O.V., Tulupova L.O., Vorontsova I.V. Modeling of shell type spatial structural forms by superpositions of support nodes coordinates. *Lecture Notes in Civil Engineering*. Volume 73. 2019. Pages 501-513. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-42939-3>

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ ВЕЛИЧИН КОЭФФИЦИЕНТОВ СУПЕРПОЗИЦИИ ОДНОМЕРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ НА ПРИМЕРАХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Воронцов О.В., Воронцова И.В.

В современных условиях при проектировании сооружений, сетей, изделий значительное место занимает этап построения и анализа геометрических моделей объектов, процессов и определенных явлений.

Важной проблемой является создание новых способов конструирования линий и поверхностей геометрических образов (ГО), что в полной мере соответствуют цели автоматизированного проектирования и воспроизведения.

Статико-геометрический метод дискретного геометрического

моделирования кривых линий и поверхностей позволяет получить дискретные каркасы криволинейных поверхностей под действием внешней формообразующей нагрузки и, кроме того, является простым и наглядным. Использование статико-геометрического метода позволяет получить дискретные каркасы криволинейных поверхностей на произвольном опорном контуре. Одновременно следует отметить, что в основу аппарата статико-геометрического метода положено решение громоздких систем линейных уравнений, которое не дает информацию о геометрических свойствах и особенностях локальных участков модели.

В статье предлагается применение геометрического аппарата суперпозиций в сочетании со статико-геометрическим методом дискретного геометрического моделирования, что позволяет существенно повысить эффективность и расширить возможности процесса дискретного моделирования ГО.

На основе геометрического аппарата суперпозиций исследованы закономерности изменения величин коэффициентов суперпозиции трех произвольно заданных узловых точек полиномиальных функций.

Данные исследования определяют общий подход к получению подобных закономерностей изменения величин коэффициентов суперпозиции трех произвольно заданных, как смежных, так и не смежных узловых точек для определения координат n точек моделируемых любых одномерных функциональных зависимостей и произвольных одномерных множеств точек.

На примере полиномиальных функций показано, что полученные формулы вычисления величин коэффициентов суперпозиции заданных трех узловых точек для избранных расчетных схем, позволяют решать задачи сплошной дискретной интерполяции и экстраполяции числовыми последовательностями любых одномерных функциональных зависимостей (определять ординаты искомых точек дискретных кривых по трем заданным ординатам узловых точек) без трудоемких операций составления и решения больших систем линейных уравнений.

Ключевые слова: дискретное моделирование, геометрические образы, статико-геометрический метод, геометрический аппарат суперпозиций, полиномиальные функции.

STUDY OF REGULARITIES OF VALUES CHANGE OF SUPERPOSITION COEFFICIENTS OF ONE-DIMENSIONAL FUNCTIONAL DEPENDENCES ON THE EXAMPLE OF POLYNOMIAL FUNCTIONS

Oleg Vorontsov, Irina Vorontsova

In modern conditions, in design of structures, networks, products, the stage of constructing and analyzing geometric models of objects, processes and

certain phenomena takes a significant place.

An important problem is a creation of new methods for constructing lines and surfaces of geometric images, which fully corresponds to the purpose of automated design and reproduction.

The static-geometric method of discrete geometric modeling of curved lines and surfaces makes it possible to obtain discrete frames of curved surfaces under the action of an external shaping load and, moreover, is simple and intuitive. Usage of the static-geometric method allows also obtaining discrete frames of curved surfaces on an arbitrary bearing contour. At the same time, it should be noted that the apparatus of this method is based on solutions of cumbersome systems of linear equations, which does not provide information on geometric properties and features of local parts of models.

In the article it is proposed the use of the geometric apparatus of superpositions in combination with the static-geometric method of discrete geometric modeling, which can significantly increase efficiency and expand capabilities of the discrete modeling process of geometric images.

On the basis of the geometric apparatus of superpositions, regularities of values change in superposition coefficients of three arbitrarily given nodal points of polynomial functions are investigated.

These researches determine a general approach to obtaining similar regularities of values change of superposition coefficients of three arbitrary given nodal points (as adjacent as not-adjacent) to determine coordinates of n points of any modeled one-dimensional functional dependencies and arbitrary one-dimensional sets of points.

Using polynomial functions as an example, it is shown that the obtained formulas for calculating values of superposition coefficients of given three nodal points for selected design schemes allow solving problems of continuous discrete interpolation and extrapolation by numerical sequences of any one-dimensional functional dependencies (as determining ordinates of desired points of discrete curves by three given ordinates of nodal points) without time-consuming operations of composing and solving large systems of linear equations.

Keywords: discrete modeling, geometric images, static-geometric method, geometric apparatus of superposition, polynomial functions.

References

1. Vorontsov O.V., Tulupova L.O. (2014) Discrete modeling of curved surfaces with two-dimensional dot sets: sbornik statey po materialam XL mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Tehnicheskie nauki – ot teorii k praktike». Novosibirsk, 11 (36), 7 – 16. [in Russian] http://sibac.info/sites/default/files/archive/2014/2014.11.19_teh._nauki_pravka.pdf

2. Vorontsov O.V., Vorontsova I.V. (2020) One-dimensional discrete interpolation method based on the coordinates of three points of numerical sequences using the example of numerical functions. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання*. Kherson: KhNTU, 3, 2.2, 35 – 43. [in Ukrainian] <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.3>
3. Vorontsov O.V., Tulupova L.O., Vorontsova I.V. (2018) Discrete modeling of building structures geometric images. *International Journal of Engineering & Technology*, 7, 3.2, 727 – 731. [in English] DOI: [10.14419/ijet.v7i3.2.15467](https://doi.org/10.14419/ijet.v7i3.2.15467)
4. Vorontsov O.V., Tulupova L.O., Vorontsova I.V. (2018) Geometric and Computer Modeling of Building Structures Forms. *International Journal of Engineering & Technology*, 7 (4.8), 8, 560-565. [in English] DOI: [10.14419/ijet.v7i4.8.27306](https://doi.org/10.14419/ijet.v7i4.8.27306)
5. Vorontsov O.V., Tulupova L.O., Vorontsova I.V. (2019) Modeling of shell type spatial structural forms by superpositions of support nodes coordinates. *Lecture Notes in Civil Engineering*, 73, 501-513. [in English] <https://doi.org/10.1007/978-3-030-42939-3>