

УДК 517.518:004.92(075.8)

**АЛГОРИТМИЧЕСКО-ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ  
ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ  
ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ  
В СЛУЧАЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ПЕРВЫХ  
ПРОИЗВОДНЫХ**

Еремеев В. С., д.т.н.,

[evs1938@gmail.com](mailto:evs1938@gmail.com), ORCID: 0000-0002-0131-0049

Ракович А.Н.,

[rakovych.anna@gmail.com](mailto:rakovych.anna@gmail.com), ORCID:0000-0001-6005-9483

Мелитопольский государственный педагогический университет  
им. Богдана Хмельницкого (Украина)

*Работа посвящена созданию кубического сплайна  $S(x)$ , который обеспечивает восстановление функциональной зависимости  $Y(x)$  при задании условий для первой производной функции на границах её определения. Предполагается, что функция  $Y(x)$  непрерывна, обладает непрерывными первой и второй производными на отрезке  $[a,b]$ , а в узловых точках  $x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b$  принимает известные значения, равные, соответственно,  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, n$ . Сплайн представляется в виде  $n$  многочленов не выше третьего порядка. Задача сводится к нахождению  $4n$  неизвестных коэффициентов сплайна. Для их определения сформирована система из  $4n-2$  уравнений:  $2n$  уравнений, учитывающих значения функции в узловых точках,  $n-1$  уравнений, отражающих непрерывность первой производной и  $n-1$  уравнений, отражающих непрерывность второй производной на границах соседних многочленов, а также два условия, относящиеся к значениям первой производной на границах функции. Решение задачи методом прогонки позволило разработать алгоритмическо-программное обеспечение для построения соответствующего кубического сплайна  $S(x)$  в случае непрерывной функции  $Y(x)$  с непрерывными первой и второй производными на отрезке  $[a,b]$  с заданными значениями первой производной на его границах. Предложена схема для реализации решения на алгоритмическом языке. Разработана программа Scupe в оболочке Microsoft Visual Studio с использованием языка C++. Величина ошибки восстановления функции с использованием предложенной схемы изучалась на примере функции  $Y(x)=\sin(x)$ . Результаты тестирования показали, что относительная точность интерполирования при количестве узловых точек  $n=10$  на отрезке  $[0, \pi/2]$  составляла в среднем около  $1.4 \cdot 10^{-3}$ . Максимальная точность обнаружена на первом интервале:  $(0.4-0.9)10^{-3}$ . Минимальная точность зафиксирована в начале второго и последнего десятого интервала:  $(4-6)10^{-2}$ . Увеличение числа узлов до  $10^2, 10^3$  и  $10^4$  приводило к*

повышению средней относительной точности до  $1 \cdot 10^{-5}$ ,  $1 \cdot 10^{-7}$  и  $2 \cdot 10^{-9}$ , соответственно. Полученные данные могут быть использованы для интерполирования функций и обработки экспериментальных данных.

*Ключевые слова:* алгоритм восстановления функции, интерполяционный полином, интерполяция, кубический сплайн.

**Постановка проблемы.** Сплаины широко применяются в вычислительной математике [1], [2]. Одна из важных задач связана с восстановлением функциональной зависимости  $Y(x)$ , для которой известны её значения на некотором множестве узловых точек. Построение кубического сплайна  $S(x)$ , на границах которого заданы вторые производные, рассмотрено во многих публикациях [3], [4]. Настоящая статья посвящена разработке алгоритмическо-программного обеспечения для использования кубического сплайна при восстановлении функциональной зависимости в случае граничных условий для первых производных.

**Анализ последних достижений и публикаций.** Построение кубического сплайна  $S(x)$  с нулевыми граничными условиями для вторых производных описано во многих публикациях [1], [3], [4]. В ряде случаев имеется необходимость обеспечить иные граничные условия, поэтому изучение этого вопроса имеет практический интерес.

**Формулировка цели статьи.** Пусть функция  $Y(x)$ , непрерывная на отрезке  $[a, b]$ , принимает значения  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  в узловых точках  $x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b$ . Рассмотрим возможность восстановления  $Y(x)$  с помощью сплайна  $S(x)$ , определяемого многочленами третьего порядка:

$$Y_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3, \quad k = [1, \dots, n], \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k. \quad (1)$$

Из условия непрерывности сплайна следует:

$$Y_k(x_{k-1}) = Y_{k-1}(x_{k-1}). \quad (2)$$

С целью обеспечения гладкости потребуем непрерывности первой и второй производных сплайна на границах соседних интервалов:

$$Y'_k(x_{k-1}) = Y'_{k-1}(x_{k-1}), \quad Y''_k(x_{k-1}) = Y''_{k-1}(x_{k-1}), \quad k = [2, \dots, n]. \quad (3)$$

Построение сплайна, определяемого формулами (1)-(3), обычно проводится при выполнении условий [3], [4]

$$Y''_1(a) = 0, \quad Y''_n(b) = 0, \quad \text{в некоторых случаях в виде } c_1 = 0, \quad c_n = 0. \quad (4)$$

В настоящей работе рассматривается решение задачи при задании условий к первым производным функции на границах её определения

$$Y'_1(x_0) = s_1, \quad Y'_n(x_n) = s_2 \quad (5)$$

и разработке алгоритма для построения соответствующего сплайна с использованием программного обеспечения.

**Основная часть.** Согласно (1) свободные члены сплайна  $S(x)$  равны

$$a_k = y_k. \quad (6)$$

Из формул (1), (2), (6) следует выполнение равенств:

$$g_k = b_k - c_k \delta x_k + d_k \delta x_k^2, \quad k = [1, \dots, n], \quad (7)$$

где  $\delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ,  $\delta y_k = y_k - y_{k-1}$ ,  $g_k = \delta y_k / \delta x_k$ .

Запишем условия непрерывности производных (3) в виде:

$$b_k = b_{k-1} + 2c_k \delta x_k - 3d_k \delta x_k^2, \quad k = [2, \dots, n], \quad d_k = (c_k - c_{k-1}) / (3\delta x_k), \quad k = [2, \dots, n]. \quad (8)$$

После приравнивания производной многочлена  $Y_I(x)$  при  $x = x_0$  её значению  $s_I$  в соответствие с граничным условием (5) получим:

$$d_I = (s_I - b_I + 2c_I \delta x_I) / 3\delta x_I^2. \quad (9)$$

Из второго граничного условия (5) имеем:

$$b_n = s_2. \quad (10)$$

Решение системы из  $3n$  алгебраических уравнений (7) – (10) с  $3n$  коэффициентами  $b_k$ ,  $c_k$ ,  $d_k$  проведём следующим образом. Сначала перейдём к системе неизвестных, свободной от  $d_I$  и  $d_k$ . Подстановка  $d_I$  из (9) в (7) при  $k=1$ ,  $d_k$  из (9) в (8) и  $d_k$  из (9) в (7) даёт

$$c_I = (2b_I + s_I - 3g_I) / \delta x_I, \quad (11.1)$$

$$b_k = b_{k-1} + (c_{k-1} + c_k) \delta x_k, \quad k = [2, \dots, n], \quad (11.2)$$

$$b_k = g_k + (c_{k-1} \delta x_k + 2c_k \delta x_k) / 3, \quad k = [2, \dots, n]. \quad (11.3)$$

Используя (11.2), (11.3), выразим  $c_k$  через  $b_k$  и  $b_{k-1}$ :

$$c_k = (2b_k + b_{k-1} - 3g_k) / \delta x_k, \quad k = [2, \dots, n], \quad (11.4)$$

откуда следует  $c_{k+1} = (2b_{k+1} + b_k - 3g_{k+1}) / \delta x_{k+1}$ . Подставляя полученное выражение в формулу (11.2), представленную в форме  $b_{k+1} = b_k + (c_k + c_{k+1}) \delta x_k$ , найдём:

$$b_{k-1} \delta x_{k+1} + 2b_k (\delta x_k + \delta x_{k+1}) + b_{k+1} \delta x_k = 3(g_k \delta x_{k+1} + g_{k+1} \delta x_k), \quad k = [2, \dots, n-1]. \quad (12)$$

Расширим возможность использования формулы (12) для  $k=1$  путём введения формального коэффициента  $b_0$ . После подстановки значения  $d_I$  из (10) в (8) при  $k=1$  найдём:

$$b_0 = s_I. \quad (13)$$

Выразим коэффициент  $b_I$  через коэффициент  $b_2$ . Из формулы (12) для  $k=1$  с учётом (13) найдём:

$$b_I = -b_2 \delta x_I / [2(\delta x_I + \delta x_2)] + [3(g_I \delta x_2 + g_2 \delta x_I) - s_I \delta x_2] / [2(\delta x_I + \delta x_2)]. \quad (14)$$

Запишем уравнения (12) и (14) в форме:

$$-B_I b_I + C_I b_2 = D_I, \quad A_k b_{k-1} - B_k b_k + C_k b_{k+1} = D_k, \quad k = [2, \dots, n-1]. \quad (15)$$

где

$$B_I = -2(\delta x_I + \delta x_2), \quad C_I = \delta x_I, \quad D_I = 3(g_I \delta x_2 + g_2 \delta x_I) - s_I \delta x_2, \quad A_k = \delta x_{k+1}, \\ B_k = -2(\delta x_k + \delta x_{k+1}), \quad C_k = \delta x_k, \quad D_k = 3(g_k \delta x_{k+1} + g_{k+1} \delta x_k). \quad k = [2, \dots, n-1]. \quad (16)$$

Решение системы уравнений (15) получим методом прогонки

$$b_{k-1} = \alpha_{k-1} b_k + \beta_{k-1}, \quad k = [1, \dots, 2]. \quad (17)$$

Из сравнения  $b_I = \alpha_I b_2 + \beta_I$  с формулой (14) имеем:

$$\alpha_I = -\delta x_I / [2(\delta x_I + \delta x_2)], \quad \beta_I = [3(g_I \delta x_2 + g_2 \delta x_I) - s_I \delta x_2] / [2(\delta x_I + \delta x_2)], \quad (18)$$

Для определения  $\alpha_k$  и  $\beta_k$   $k = [2, \dots, n-1]$  подставим (17) в (15)

$$b_k = -C_k b_{k+1} / (A_k \alpha_{k-1} - B_k) + (A_k \beta_{k-1} - D_k) / (B_k - A_k \alpha_{k-1}),$$

откуда с учётом (17) следует

$$\alpha_k = C_k / (B_k - A_k \alpha_{k-1}), \quad \beta_k = (A_k \beta_{k-1} - D_k) / (B_k - A_k \alpha_{k-1}), \quad k = [2, \dots, n-1]. \quad (19)$$

Таким образом, все коэффициенты  $b_k$  определены формулой (17). Для нахождения коэффициентов  $d_n$  и  $c_n$  выразим их через  $b_n$  с помощью формул (7) и (8):

$$c_n=(2b_n+b_{n-1}-3g_n)/\delta x_n, d_n=(b_n+b_{n-1}-2g_n)/\delta x_n^2. \quad (20)$$

Расчёт значения сплайна в заданной точке производится в следующем порядке, рис.1. Сначала по формулам (16) вычисляются коэффициенты уравнения (15)  $B_l, C_l, D_l, A_k, B_k, C_k, D_k$ . Далее с использованием формул (18), (19) определяются прогоночные коэффициенты  $\alpha_l, \beta_l, \alpha_k, \beta_k$ , которые позволяют найти по рекурсионной формуле (17) коэффициенты  $b_k$  уравнения (12) для граничного условия  $b_n=s_2$ . Коэффициенты сплайна  $c_l, c_k$  определяются по формулам (11.1), (11.4).

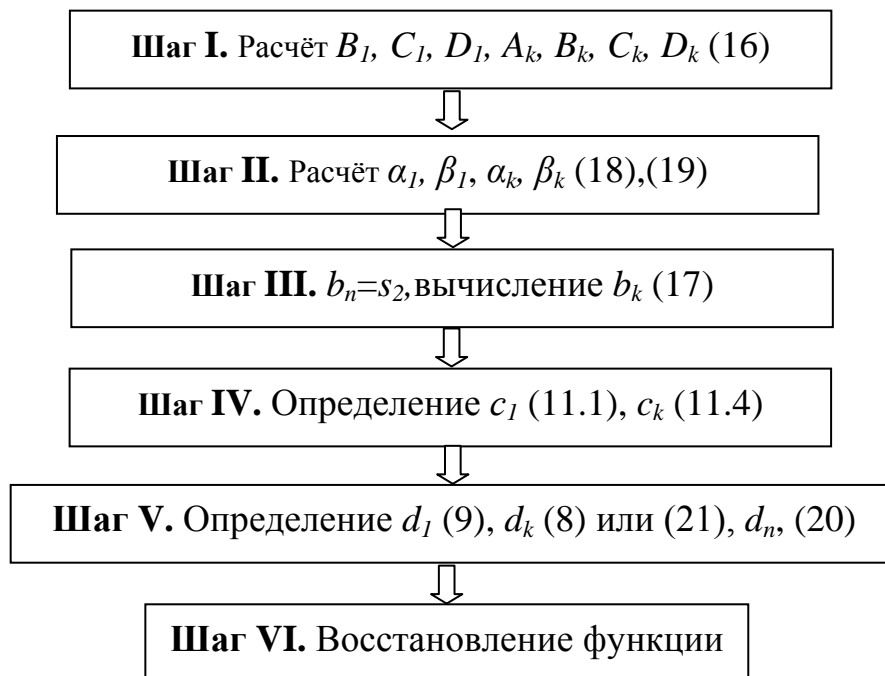


Рис. 1. Структурная схема восстановления функциональной зависимости

Коэффициенты  $d_l, d_n$  вычисляются по формулам (9), (20). Коэффициент  $d_k$  может находиться по формуле (8). Численные эксперименты показали, что более точные результаты, особенно при небольшом количестве узлов, получаются с использованием формулы (7), согласно которой

$$d_k=(g_k-b_k+c_k \delta x_k)/\delta x_k^2, k=[2, \dots, n]. \quad (21)$$

Тестирование программы проводилось с использованием функции  $x \sin(x)$  на отрезке  $[0, \pi/2]$  с граничными условиями  $s_1=0, s_2= \pi/2$ . При количестве узлов  $n=10$  было найдено 10 многочленов (1) для десяти интервалов. Наибольшая неточность выявлена в первом интервале, где различие результатов расчёта с использованием сплайна и функции  $x \sin(x)$ , равное  $|S(x)-x \sin(x)|$ , находилось в первой цифре после запятой. Неточность

расчётов для интервалов с номерами 2-4 отмечалась во втором знаке. В остальных интервалах ошибка была в третьем знаке. При  $n=20$  точность улучшилась в первом интервале до второго знака. С увеличением количества узлов до  $10^2$  и  $10^3$  точность во всех интервалах повысилась, соответственно, до третьего и четвёртого знаков. Максимальная ошибка зафиксирована на стыке соседних интервалов. В табл. 1 представлена часть данных, примыкающих к верхней границе при числе узлов  $n=10^3$ .

Таблица 1

## Результаты тестирования программы

№	x	xsin(x)	S(x)
0	1.56923	1.56922	1.56922
1	1.56954	1.56954	1.56954
2	1.56985	1.56985	1.57010
3	1.57017	1.57017	1.57066
4	1.57048	1.57048	1.57097
5	1.57080	1.57080	1.57080

Из табл. 1 видно, что относительная погрешность функциональной зависимости при  $n=10^3$  составляет около  $10^{-3}$ . Увеличение числа узлов до  $10^2$ ,  $10^3$  и  $10^4$  приводит к повышению точности, соответственно, до  $1 \cdot 10^{-5}$ ,  $1 \cdot 10^{-7}$  и  $2 \cdot 10^{-9}$ .

Полученные данные могут использоваться при обработке результатов однофакторного эксперимента. В качестве примера найдём уравнение регрессии, которое определяет зависимость фактора  $y$  от  $x$  в соответствии с данными, представленными в табл. 2.

Отметим, что относительная точность измерения входного и выходного факторов в рассматриваемом случае составляла не менее  $10^{-3}$ . Построение сплайна (1) проводилось по разработанной методике с граничными условиями  $s_1=20,0$ ,  $s_2=-1,0$ . График найденной зависимости представлен на рис. 2.

Таблица 2

Экспериментальные данные о зависимости выходного фактора  $y$  от входной величины, полученные с относительной точностью не менее  $10^{-3}$

x	0,000	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,000
y	10,00	19,35	15,70	5,65	2,30	9,75	14,80	12,10	9,10

Из рис. 2 видно, что графическая зависимость достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными, которые на графике выделены кружочками.

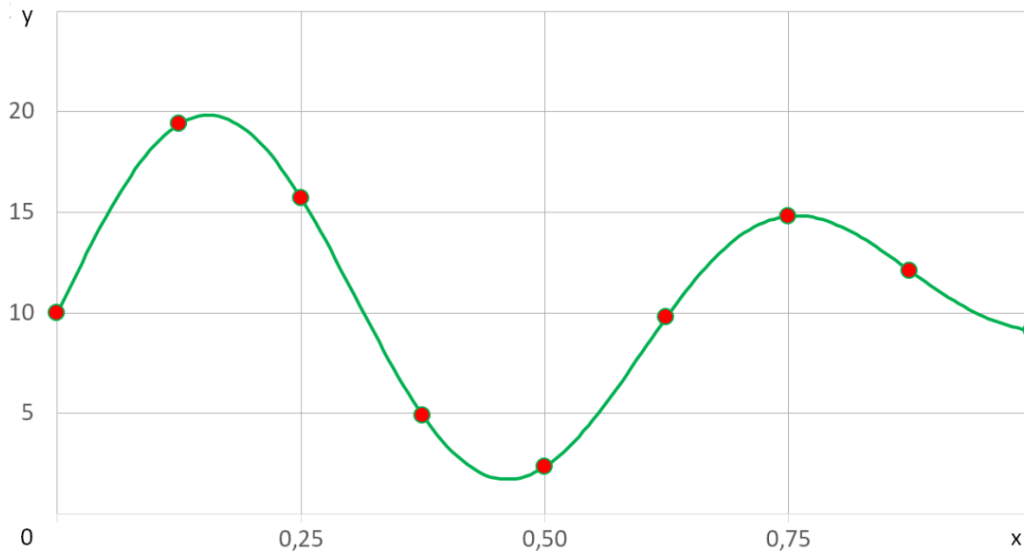


Рис. 2. График уравнения регрессии, построенного с использованием сплайна в соответствии с данными табл. 2

**Выводы.** Разработаны алгоритм и программа для построения кубического сплайна с заданными граничными условиями для первой производной. Тестирование программного продукта показало, что относительная точность восстановления функциональной зависимости при количестве узловых точек  $n$ , равном 10, составляет около  $10^{-3}$ . Повышение значения  $n$  до  $10^2$ ,  $10^3$  и  $10^4$  приводит к повышению точности, соответственно, до  $1 \cdot 10^{-5}$ ,  $1 \cdot 10^{-7}$  и  $2 \cdot 10^{-9}$ .

### Литература

1. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
2. Аушева Н.М. Ізотропні фундаментальні сплайни: Зб. наук. праць Мелітопольського державного педагогічного університету ім. Богдана Хмельницького. Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького. 2016. Вип. 6. С. 3-7.
3. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
4. Задорожный А.Г. Построение сплайнов с использованием библиотеки OpenGL. Новосибирск: Изд-во НГТУ. 2019. 88 с.

## АЛГОРИТМІЧНІ-ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДЛЯ ВИКОРИСТАННЯ КУБІЧНИХ СПЛАЙНІВ ПРИ ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ ЗАЛЕЖНО У РАЗІ ГРАНИЧНИХ УМОВ ДЛЯ ПЕРШИХ ПОХІДНИХ

Єремєєв В. С., Ракович Г.М.

Робота присвячена створенню кубічного сплайна  $S(x)$ , який забезпечує відновлення функціональної залежності  $Y(x)$  при заданні умов

для першої похідної функції на кордонах її визначення. Передбачається, що функція  $Y(x)$  неперервна, має безперервними першої і другої похідними на відрізку  $[a,b]$ , а в вузлових точках  $x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b$  приймає відомі значення, рівні, відповідно  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, n$ . Сплайн представляється у вигляді  $n$  багаточленів не вище третього порядку. Завдання зводиться до знаходження  $4n$  невідомих коефіцієнтів сплайна. Для їх визначення сформована система з  $4n-2$  рівнянь:  $2n$  рівнянь, які враховують значення функції у вузлових точках,  $n-1$  рівнянь, що відображають безперервність першої похідної і  $n-1$  рівнянь, що відображають безперервність другої похідної на кордонах сусідніх многочленів, а також дві умови, що відносяться до значень першої похідної на кордонах функції. Рішення завдання методом прогонки дозволило розробити алгоритмічне-програмне забезпечення для побудови відповідного кубічного сплайна  $S(x)$  в разі безперервної функції  $Y(x)$  з безперервними першої і другої похідними на відрізку  $[a,b]$  з заданими значеннями першої похідної на його кордонах. Запропоновано схему для реалізації рішення на алгоритмічній мові. Розроблено програму *Scure* в оболонці *Microsoft Visual Studio* з використанням мови *C++*. Величина помилки відновлення функції з використанням запропонованої схеми вивчалася на прикладі функції  $Y(x)=\sin(x)$ . Результати тестування показали, що відносна точність інтерполяції при кількості вузлових точок  $n=10$  на відрізку  $[0, \pi/2]$  становила в середньому близько  $1.4 \cdot 10^{-3}$ . Максимальна точність виявлена на першому інтервалі:  $(0.4-0.9)10^{-3}$ . Мінімальна точність зафіксована на початку другого і останнього десятого інтервалу:  $(4-6)10^{-2}$ . Збільшення числа вузлів до  $10^2$ ,  $10^3$  і  $10^4$  призводило до підвищення середньої відносної точності до  $1 \cdot 10^{-5}$ ,  $1 \cdot 10^{-7}$  і  $2 \cdot 10^{-9}$ , відповідно. Отримані дані можуть бути використані для інтерполяції функцій і обробки експериментальних даних.

*Ключові слова:* алгоритм відновлення функції, інтерполяційний поліном, інтерполяція, кубічний сплайн.

## **ALGORITHMIC SOFTWARE FOR USING THE CUBIC SPLINE IN RESTORING THE FUNCTIONAL DEPENDENCE IN THE CASE OF BOUNDARY CONDITIONS FOR THE FIRST DERIVATIVES**

Vladimir Eremeev, Anna Rackovich

*The work is devoted to the creation of a cubic spline  $S(x)$ , which ensures the restoration of the functional dependence  $Y(x)$  when specifying conditions for the first derivative of a function on the boundaries of its definition. It is assumed that the function  $Y(x)$  is continuous, has continuous first and second derivatives on the interval  $[a,b]$ , and at the nodal points  $x_0=a, x_1, x_2, \dots, x_n=b$  takes known values equal, respectively,  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, n$ . A spline is represented as  $n$  polynomials of order no higher than three. The problem is reduced to*

finding  $4n$  unknown spline coefficients. To determine them, a system of  $4n-2$  equations was formed:  $2n$  equations taking into account the values of the function at the nodal points,  $n-1$  equations reflecting the continuity of the first derivative and  $n-1$  equations reflecting the continuity of the second derivative at the boundaries of neighboring polynomials, as well as two conditions, related to the values of the first derivative at the boundaries of the function. Solving the problem by the sweep method allowed us to develop algorithmic software for constructing the corresponding cubic spline  $S(x)$  in the case of a continuous function  $Y(x)$  with continuous first and second derivatives on the segment  $[a,b]$  with given values of the first derivative on its boundaries. A scheme for implementing a solution in an algorithmic language is proposed. The Scype program was developed in the Microsoft Visual Studio shell using the C++ language. The magnitude of the function recovery error using the proposed scheme was studied using the example of the function  $Y(x)=\sin(x)$ . The test results showed that the relative accuracy of interpolation with the number of nodal points  $n=10$  on the segment  $[0,\pi/2]$  averaged about  $1.4 \cdot 10^{-3}$ . The maximum accuracy was found in the first interval:  $(0.4-0.9)10^{-3}$ . The minimum accuracy is recorded at the beginning of the second and last tenth interval:  $(4-6)10^{-2}$ . An increase in the number of nodes to  $10^2$ ,  $10^3$  and  $10^4$  led to an increase in the average relative accuracy to  $1 \cdot 10^{-5}$ ,  $1 \cdot 10^{-7}$  and  $2 \cdot 10^{-9}$ , respectively. The data obtained can be used to interpolate functions and process experimental data.

*Key words:* function recovery algorithm, interpolation polynomial, interpolation, cubic spline.

### **References**

1. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. (1976). Splines in computational mathematics. Moscow: Nauka, 248 [in Russian].
2. Ausheva N.M. (2016). Isotropic fundamental splines: Zb. sciences. Prats of Melitopol State Pedagogical University IM. Bohdan Khmelnytsky. Melitopol: Vidavnitstvo MDPU im. B. Khmelnytsky. 6, 3-7 [in Ukrainian].
3. Zavyalov Yu. S. (1980). Methods of spline functions. Moscow: Nauka, 352[in Russian].
4. Zadorozhny A.G. (2019). Building splines using the OpenGL library. Novosibirsk: Publishing house of NSTU, 88 [in Russian].