

УДК 514.18

## ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТРАЄКТОРІЇ ВАНТАЖУ ХИТНОЇ ПРУЖИНИ З РУХОМОЮ ТОЧКОЮ ПІДВІСКИ

Семків О. М., д.т.н.,

[legooleg1@i.ua](mailto:legooleg1@i.ua), ORCID: 0000-0002-9347-0997

Шевченко С.М., к.т.н.

[shevchenkosn@nuczu.edu.ua](mailto:shevchenkosn@nuczu.edu.ua), ORCID: 0000-0002-6740-9252

Національний університет цивільного захисту України (м. Харків)

*Наведено геометричне моделювання маятникового коливання у вертикальній площині вантажу підвішеної невагомої пружини, яка при русі зберігає прямолінійність своєї осі. В літературі такий вид маятника називають хитною пружиною (swinging spring). Зазначена модель пружини знаходить широке застосування у якості механічної моделі більш складних процесів у природі й техніці. Подібно тому, як відомий маятник Капиці дозволяє пояснити деякі фундаментальні поняття. У нашому випадку мова йде про процеси із внутрішніми нелінійно пов'язаними системами надання різних коливальних компонентів.*

*При цьому, що істотно, складові компоненти системи обмінюються енергією між собою. Часто автори використовують хитну пружину як парадигму для вивчення нелінійних зв'язаних систем. Для хитної пружини ідентифікуються три енергетичні компоненти, схожі на рух пружини, рух маятника, а також зв'язку між цими рухами. Представлена процедура може бути застосована, в принципі, до довільних нелінійних зв'язаних систем, щоб показати, як зв'язок опосередкує внутрішні енергетичні обміни і як розподіл енергії змінюється відповідно до параметрів системи.*

*В роботі за допомогою комп'ютера траєкторія вантажу хитної пружини моделюється з використанням значень маси вантажу, жорсткості пружини та її довжини в ненавантаженому стані. Крім того, використовуються такі початкові величини параметрів ініціювання коливань хитної пружини: кут відхилення осі пружини від вертикалі, швидкість зміни величини цього кута, а також параметр подовження пружини та швидкість зміни подовження. Розрахунки виконано за допомогою рівняння Лагранжа другого роду. Розглянуто варіанти знаходження нехаотичних траєкторій точкового вантажу хитної пружини з рухомою (вздовж координатних осей) точкою кріплення.*

*Ключові слова: маятникові коливання з рухомою точкою підвісу, періодичної траєкторії руху, хитна пружина, рівняння Лагранжа другого роду.*

**Постановка проблеми.** Для пояснення складних процесів, що

відбуваються в природі, часто застосовують наочні механічні інтерпретації. Зокрема, для коливальних процесів у якості моделей використовують маятникові аналоги. Класичним прикладом вважається модель оберненого маятника з віброуючою точкою кріплення (маятник Капиці). Далі розглянемо маятникові коливання у вертикальній площині вантажу підвішеної невагомої пружини, яка при русі зберігає прямолінійність своєї осі. В літературі такий вид маятника називають хитною пружиною (swinging spring) [1-3]. Особливість хитної пружини виявляється після порівнянь траєкторій переміщення точкового вантажу у випадках хитної пружини та параметричного маятника. Для параметричного маятника вплив параметра проявляються в зміні довжини маятника, який здійснюється завдяки зовнішньому джерелу енергії. А у хитній пружині відсутнє зовнішнє джерело енергії, і маятники такого виду повинні самі «забезпечувати» існування подібних коливань.

Для практичних впроваджень інтерес представляє дослідження особливостей коливань хитної пружини. Наприклад, з використанням моделі хитної пружини досліджується атмосферний баланс планети, коливання молекули вуглекислого газу, коливання високовольтних проводів, моделюються вібрації гелікоптера. Список можна продовжувати [3-7]. У цих, на перший погляд, розрізних впровадженнях є спільна особливість – можливість їх дослідження на основі моделі хитної пружини. При цьому ключовим моментом є визначення умов забезпечення нехаотичних періодичних траєкторій вантажу хитної пружини. Отже, на актуальність обраної теми вказує необхідність розробки інженерного способу знаходження значень набору параметрів для забезпечення нехаотичної періодичної траєкторії руху точкового вантажу хитної пружини, у тому числі - і за умови рухомої точки її кріплення.

**Аналіз останніх досліджень.** В роботах [1-7] наведено переважно теоретичні результати. Для інженерної практики необхідні способи побудови реальних нехаотичних періодичних траєкторій вантажів хитних пружин. Деякі з них описані в роботі [8], де наведено приклади періодичних траєкторій, а також в [9], де проведено дослідження умов побудови періодичних траєкторій. В роботі [10] наведено Maple-програму побудови траєкторії вантажу хитної пружини. В роботі [11] досліджуються коливання хитної пружини з рухомою точкою підвісу. Але у відомих роботах відсутній універсальний підхід до побудови періодичних траєкторій руху вантажу хитної пружини. Також відсутні аналізи коливань за допомогою фазових траєкторій функцій, які входять до опису узагальнених координат відповідної коливальної системи.

**Формулювання цілей статті.** Розробити спосіб визначення набору параметрів для забезпечення нехаотичної траєкторії руху точкового вантажу хитної пружини з рухомою точкою кріплення, а також за допомогою фазових траєкторій функцій узагальнених координат оцінити діапазон зміни їх величин.

**Основна частина.** В роботах [12-14] для побудови періодичних траєкторій вантажів математичних маятників пропонується метод проєкційного фокусування. Ідею цього метода можна покласти в основу способу знаходження нехаотичних траєкторій вантажу хитної пружини.

Наведемо спосіб визначення траєкторії переміщення по вертикальній площині  $Oxy$  вантажу хитної пружини залежно від маси  $m$  вантажу, початкової довжини  $h$  пружини у ненавантаженому стані, жорсткості  $k$  пружини і початкових умов для виникнення коливань. Опис закону руху точки підвісу оберемо у вигляді функції  $f(t)$ . Зазначимо, що у випадку рухомої точки підвісу з причини суттєвої нелінійності коливальної системи можна очікувати не лише строгих періодичних траєкторій вантажу хитної пружини, а і умовно періодичних. Тобто таких траєкторій переміщення вантажу, які не виходитимуть за межі певної смуги на площині  $Oxy$ .

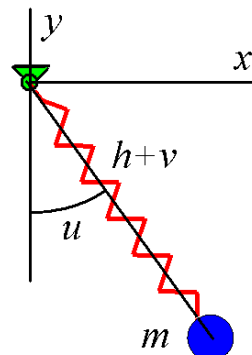


Рис. 1. Схема хитної пружини

Для опису коливань хитної пружини у якості першої узагальненої координатної функції  $u(t)$  оберемо значення кута, який вісь хитної пружини утворює з вертикальною віссю  $Oy$ . Другу узагальнену координатну функцію  $v(t)$  пов'яжемо з подовжньою зміною пружини в часі; через  $h$  позначимо довжину хитної пружини в ненавантаженому стані (рис. 1).

*Приклад 1.* Нехай точка підвісу хитної пружини рухається вздовж осі  $Ox$  за законом  $x=f(t)$ . Тоді віртуальні координати рухомого точкового вантажу можна обчислити за формулами:

$$x = (h + v) \sin u; \quad y = -(h + v) \cos u. \quad (1)$$

Лагранжیان задамо як різницю кінетичної і потенціальної енергій:

$$\begin{aligned} L = & 0.5m \left( \left( \frac{df}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + (h + v) \left( \frac{du}{dt} \right)^2 \right) + \\ & + m \frac{df}{dt} \left( \frac{dv}{dt} \sin u + (h + v) \frac{du}{dt} \sin u \right) - \\ & - 0.5kv^2 + 9.81m(h + v) \cos u. \end{aligned} \quad (2)$$

Тоді систему рівнянь Лагранжа другого роду одержуємо у вигляді:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{d^2f}{dt^2} \sin u - (h + v) \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + kv - 9.81 \cos u = 0; \quad (3)$$

$$(h + v) \frac{d^2 u}{dt^2} - \left( \frac{df}{dt} \right)^2 \cos u + 2 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + 9.81 \sin u = 0.$$

Визначимо значення маси  $m$ , яка б забезпечила періодичну траєкторію переміщення вантажу хитної пружини жорсткістю  $k$  і її довжиною  $h$  у ненавантаженому стані. Нехай  $k=50$  і  $h=2$ . Закон руху точки кріплення задамо функцією  $f(t)=\sin(2t)$ .

В якості керуючого параметра колювання хитної пружини оберемо значення маси  $m$  вантажу. Чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь (3) із початковими умовами  $u(0)=0$ ;  $du(0)=1$ ;  $v(0)=2$ ;  $dv(0)=0$ . На рис. 2 зображено інтегральну криву у фазовому просторі  $\{u, Du, t\}$  для знайденого критичного значення  $m=5,142$ . На рис. 3 наведено фазову траєкторію зазначеної узагальненої координатної функції, за допомогою якої визначається діапазон її змін. Аналогічно можна здійснити і для визначення діапазону зміни координатної функції  $v$ . Через те, що фазові траєкторії не вдається "сфокусувати" як у прикладах для математичних маятників, то для коректності одержані траєкторії руху вантажу хитної пружини вважатимемо умовно періодичними.

Після обчислення  $m_0=5,142$ . необхідно це значення підставити на місце  $m$  в систему рівнянь Лагранжа другого роду (3) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій  $u(t)$  і  $v(t)$ . Одержимо послідовність значень  $(u_i, v_i)$  при  $t=t_i$  (де  $i=1\dots S$ ). Для побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини на площині  $Oxy$  слід у вирази (1) віртуальних координат  $(x, y)$  підставити послідовність значень  $(u_i, v_i)$ .

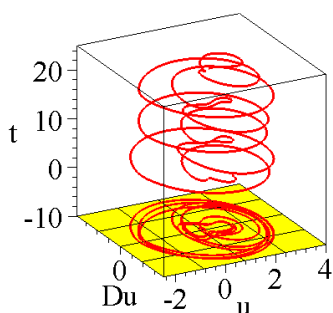


Рис. 2. Інтегральна крива для критичного значення  $m=5,142$  у фазовому просторі  $\{u, Du, t\}$ ;

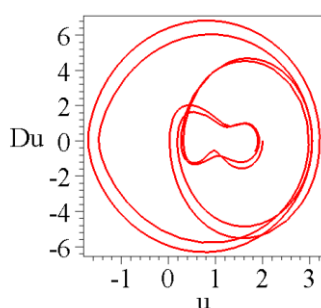


Рис. 3. Фазова траєкторія для критичного значення  $m=5,142$  на фазовій площині  $\{u, Du\}$ ;

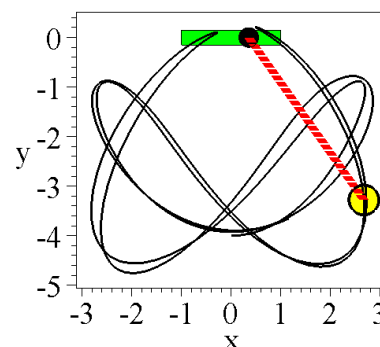


Рис. 4. Траєкторія руху вантажу хитної пружини для першого прикладу

Одержані близькі точки необхідно сполучити ломаною. В результаті знайдемо наближене зображення на площині  $Oxy$  нехаотичної періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини (рис. 4). Оскільки фазові

траєкторії не вдалося "ідеально сфокусувати", то одержану траєкторію руху вантажу хитної пружини вважатимемо умовно періодичною [14].

*Приклад 2.* Нехай точка підвісу хитної пружини рухається вздовж осі  $Oy$  за законом  $y=f(t)$ . Тоді віртуальні координати рухомого точкового вантажу можна обчислити за формулами (1). Лагранжیان задамо як різницю кінетичної і потенціальної енергій:

$$L = 0.5m \left( \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 + v^2 \left( \frac{du}{dt} \right)^2 \right) - 0.5k(v-h)^2 - m \left( 9.81 + \frac{d^2 f}{dt^2} \right) v \cos u. \quad (4)$$

Систему рівнянь Лагранжа другого роду одержуємо у вигляді:

$$2m \frac{d^2 v}{dt^2} + m \frac{d^2 f}{dt^2} \cos u - 2mv \left( \frac{du}{dt} \right)^2 + k(v-h) + 9.81m \cos u = 0; \quad (5)$$

$$-2v \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{d^2 f}{dt^2} \sin u - 4 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + 9.81 \sin u = 0.$$

Визначимо значення маси  $m$ , яка б забезпечила періодичну траєкторію переміщення вантажу хитної пружини жорсткістю  $k$  і її довжиною  $h$  у ненавантаженому стані. Нехай  $k=50$  і  $h=2.5$ . Закон руху точки кріплення задамо функцією  $y=\cos(3t)$ .

В якості керуючого параметра коливання хитної пружини також оберемо значення маси  $m$  вантажу. Чисельним методом Рунге-Кутти розв'язуємо систему рівнянь (5) із початковими умовами  $u(0)=\pi/3$ ;  $du(0)=1$ ;  $v(0)=2$ ;  $dv(0)=0$ . На рис. 5 зображено інтегральну криву у фазовому просторі  $\{u, Du, t\}$  для знайденого критичного значення  $m=5,756$ .

На рис. 6 наведено фазову траєкторію узагальненої координатної функції  $u$ , за допомогою якої можна визначити діапазон її змін. Бачимо, що фазову траєкторію не вдається "сфокусувати". Тому треба очікувати траєкторію руху вантажу хитної пружини умовно періодичною.

Після обчислення  $m_0=5,756$ . необхідно його значення підставити на місце  $m$  в систему рівнянь Лагранжа другого роду (5) і чисельно розв'язати її методом Рунге-Кутти відносно функцій  $u(t)$  і  $v(t)$ .

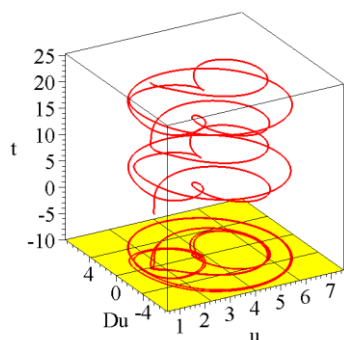


Рис. 5. Інтегральна крива для критичного значення  $m=5,756$  у фазовому просторі  $\{u, Du, t\}$ ;

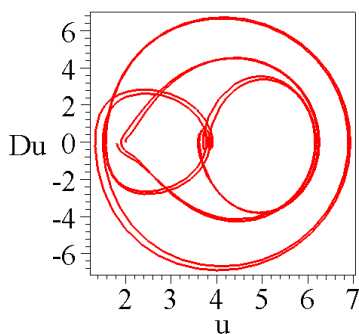


Рис. 6. Фазова траєкторія для критичного значення  $m=5,756$  на фазовій площині  $\{u, Du\}$ ;

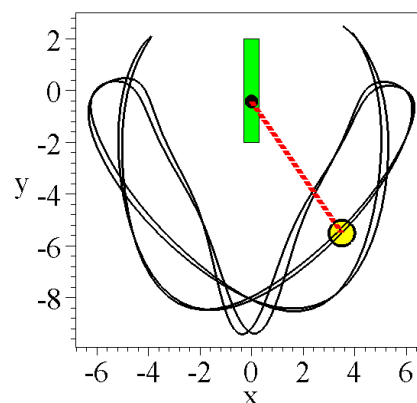


Рис. 7. Траєкторія руху вантажу хитної пружини для другого прикладу

Одержимо послідовність значень  $(u_i, v_i)$  при  $t=t_i$  (де  $i=1\dots S$ ). Для побудови траєкторії руху вантажу хитної пружини на площині  $Oxy$  слід у виразі (1) віртуальних координат  $(x, y)$  підставити послідовність значень  $(u_i, v_i)$ . В результаті знайдемо наближене зображення періодичної траєкторії руху вантажу хитної пружини для прикладу 2 (рис. 7).

Знайдені умовно періодичні траєкторії можна пояснити суттєвою нелінійністю задачі про коливання хитної пружини з рухомою точкою підвісу. Підтвердження можна знайти на сайті [15] з комп'ютерними анімаціями коливань хитних пружин. Залучаючи зоровий аналізатор, можна переконатися у природному характері коливань хитної пружини з рухомою точкою підвісу.

До подальших напрямків досліджень можливостей хитної пружини слід розглянути періодичне перекачування енергії пружини в енергію поперечних коливань вантажу і обернено. Вважається, що це виявляється можливим в досить вузькому діапазоні варіювання параметрів з максимумом, що відповідає певному співвідношенню. Необхідно перевірити, за яких умов виконується це співвідношення з прийнятною точністю і як це впливає на зображення періодичних траєкторій переміщення вантажу хитної пружини. Необхідно дослідити кількість можливих періодичних траєкторій для певного набору вхідних параметрів, а також класифікувати зображення періодичних траєкторій та виконати градацію з врахуванням збільшення їх довжин.

**Висновки.** В роботі наведено спосіб визначення значення параметрів для забезпечення умовно періодичної траєкторії руху точкового вантажу хитної пружини з рухомою точкою кріплення, (наприклад,  $m=16.571$ ;  $k=50$ ;  $h=2$ ;  $u_0=2$ ;  $Du_0=0$ ;  $v_0=0$ ;  $Dv_0=-1$ ;  $x=\sin(2*t)$ ). Достовірність одержаних результатів ілюструються комп'ютерними анімаціями коливань відповідних хитних пружин, наведених на сайті [15].

### Література

1. De Sousa M.C., Marcus F.A., Caldas I.L., Viana R.L. Energy distribution in intrinsically coupled systems: The spring pendulum paradigm. *Physica A*. Vol. 509, 1 November, 2018. P.1110-1119.
2. Власов В.Н. Величайшая Революция в Механике 4. (2014) URL: <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/2114-vls.pdf>
3. Булдакова Д.А., Кирюшин А.В. Модель качающегося пружинного маятника в истории физики и техники. Электронное научное издание «Ученые заметки ТОГУ», 2015, Том 6, № 2, С. 238 – 243.
4. Lynch P. The swinging spring: a simple model for atmospheric balance. *Large-Scale Atmosphere-Ocean Dynamics: Vol. II: Geometric Methods and Models*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001. 50 p.
5. Алдошин Г.Т., Яковлев С.П. Аналитическая модель колебаний молекулы углекислого газа. *Изв. РАН. МТТ*. 2015. № 1. С. 42-53.
6. Peng Zhang, Liang Ren, Hongnan Li, Ziguang Jia, Tao Jiang. Control of Wind-Induced Vibration of Transmission Tower-Line System by Using a Spring Pendulum. *Math.Problems in Engineering*. 2015. Article ID 671632. P. 1-10.
7. Castillo-Rivera S., Tomas-Rodriguez M. Helicopter flap/lag energy exchange study, *Nonlinear Dynam*. 2017. Issue 88, P. 1-23.
8. Broucke R, Baха P.A. Periodic solutions of a spring-pendulum system. // *Celestial mechanics*. September 1973, Vol. 8, Issue 2, P. 261-267
9. Hitzl D.L. The swinging spring invariant curves formed by quasi-periodic solution. III. *Astron and Astrophys*. 1975, Issue 41, P.187-198
10. Gavin H.P. Generalized Coordinates, Lagrange's Equations, and Constraints. CEE 541. Structural Dynamics. Department of Civil and Environmental Engineering Duke University. 2014. 23 p.
11. Алдошин Г.Т., Яковлев С.П. Динамика качающейся пружины с подвижным подвесом. *Вестник СПбГУ*. 2012. Сер. 1. Вып. 4. С. 45-52
12. Semkiv O., Shoman O., Sukharkova E., Zhurilo A., Fedchenko H. Development of Projection Technique for Determining the Non-Chaotic Oscillation Trajectories in the Conservative Pendulum Systems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Mathematics and Cybernetics – Applied Aspects*. № 2, Issue 4 (86). 2017. P. 48–57.
13. Kutsenko L., Vanin V., Shoman O., Yablonskyi P., Zapolskiy L., Hrytsyna N., Nazarenko S., Danylenko V., Sivak E., Shevchenko S. Modeling the resonance of a swinging spring based on the synthesis of a motion trajectory of its load. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies: Applied mechanics*. 2019. Vol. No.7.P. 53-64.
14. Семків О.М., Шевченко С.М. Комп'ютерне моделювання траєкторії переміщення вантажу хитної пружини з рухомою точкою підвіски. *Znanstvena misel journal*. Slovenia, 2020. Vol.1, No.40. P. 54-66.
15. Куценко, Л.М. Пікрасов М.М., Запольський Л.Л. Ілюстрації до статті «Геометричне моделювання періодичної траєкторії вантажу хитної



пружини» (2018) URL: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/7637>.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИИ ГРУЗА КАЧАЮЩЕЙСЯ ПРУЖИНЫ С ПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Семків О. М., Шевченко С.М.

*Приведено геометрическое моделирование маятникового колебания в вертикальной плоскости груза подвешенной невесомой пружины, которая при движении сохраняет прямолинейность своей оси. В литературе такой вид маятника называют качающейся пружиной (swinging spring). Указанная модель пружины находит широкое применение в качестве механической модели более сложных процессов в природе и технике. Подобно тому, как известный маятник Копиці позволяет объяснить некоторые фундаментальные понятия. В нашем случае речь пойдет о процессах с внутренними нелинейно связанными системами предоставления разных колебательных компонентов. При этом, что существенно, составные компоненты системы обмениваются энергией между собой. Часто авторы используют качающуюся пружину как парадигму для изучения нелинейных связанных систем. Для качающейся пружины идентифицируются три энергетических компонента, похожих на движение пружины, движение маятника, а также связи между этими движениями. Представленная процедура может быть применена, в принципе, к произвольным нелинейным связанным системам, чтобы показать, как связь опосредствует внутренние энергетические обмены и как распределение энергии изменяется согласно параметрам системы.*

*В работе с помощью компьютера траектория груза качающейся пружины моделируется с использованием значений массы груза, жесткости пружины и ее длины в ненагруженном состоянии. Кроме того, используются начальные величины параметров инициирования колебаний качающейся пружины: угол отклонения оси пружины от вертикали, скорость изменения величины этого угла, а также параметр удлинения пружины и скорость изменения удлинения. Расчеты выполнены с помощью уравнения Лагранжа второго рода. Рассмотрены варианты нахождения нехаотических траекторий точечного груза качающейся пружины с подвижной (вдоль координатных осей) точкой крепления.*

*Ключевые слова: маятниковые колебания с подвижной точкой подвеса, периодической траектории движения, качающаяся пружина, уравнение Лагранжа второго рода.*



## **GEOMETRIC MODELING OF THE TRAJECTORY CARGO SWINGING SPRING WITH MOVABLE SUSPENSION**

Oleg Semkiv, Serhii Shevchenko

*The geometric modeling of pendulum oscillation in the vertical plane of the cargo suspended by a suspended spring, which, when moving, retains the rectinity of its axis. In the literature, this kind of pendulum is called the swinging spring (Swinging Spring). The specified spring model is widely used as a mechanical model of more complex processes in nature and technology. Just as the famous pendulum of Kapitzi allows you to explain some fundamental concepts. In our case, we will talk about processes with internal nonlinearly related systems for the provision of different oscillatory components. At the same time, which is essential, the components of the system exchange the energy among themselves. Often the authors use the swinging spring as a paradigm to study nonlinear related systems. For swinging springs, three energy components are identified, similar to the movement of the spring, the movement of the pendulum, as well as the relationship between these movements. The presented procedure can be applied, in principle, to arbitrary nonlinear associated systems to show how the connection is mediated by internal energy exchanges and how the energy distribution varies according to the system parameters.*

*In the work using a computer, the cargo trajectory of the swinging spring is modeled using the weights of the cargo, the rigidity of the spring and its length in the unloaded state. In addition, the initial values of the initiation parameters of the oscillations of the swinging spring are used: the angle of deviation of the spring axis from the vertical, the rate of changes in the magnitude of this angle, as well as the springs elongation parameter and the rate of elongation change. Calculations are made using the Lagrange equation of the second kind. The options for finding a nonchaotic trajectory of point load of a swinging spring with movable (along the coordinate axes) of the mounting point are considered.*

*Keywords: pendulum oscillations with moving point of suspension, periodic trajectory of movement, swinging spring, second-kind Lagrange equation.*

### **Referenses**

1. De Sousa M.C., Marcus F.A., Caldas I.L., Viana R.I. (2018) Energy distribution in intrinsically coupled systems: The spring pendulum paradigm. *Fizika A.*, 509, 1 noyabrya, 1110-1119 [in English]
2. Vlasov V.N. The Greatest Revolution in Mechanics 4. (2014) URL: <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/2114-vls.pdf> [in Russian]
3. Buldakova d. A., Kiryushin A. V. (2015) The model rocked a spring pendulum in the fission and technicians. *Elektronnoye nauchnoye izdaniye «Uchennyye zametki Togu»*, 6, 2, 238 - 243. [in Russian]
4. Linch P. (2001) The swinging spring: a simple model for atmospheric

- balance. Large-Scale Atmosphere-Ocean Dynamics: Vol. II: Geometric Methods and Models, Cambridge University Press, Cambridge, 50 [in English]
5. Aldoshin ul. T., Yakovlev S. (2015) An analytical model of carbon dioxide molecule oscillations. *izv. Ran. MTT*, 1,42-53. [in Russian]
  6. Peng Zhang, Liang Ren, Hongnan Li, Ziguang Jia, Tao Jiang. (2015) Control of Wind-Induced Vibration of Transmission Tower-Line System by Using a Spring Pendulum. *Math.Problems in Engineering*, Article ID 671632, 1-10 [in English]
  7. Castillo-Rivera S., Tomas-Rodriguez M. (2017) Helicopter flap/lag energy exchange study, *Nonlinear Dynam*, 88, 1-23. [in English]
  8. Broucke R, Baxa P.A. (1973) Periodic solutions of a spring-pendulum system. *Celestial mechanics*, 8, 2, 261-267. [in English]
  9. Hitzl D.L. (1975) The swinging spring invariant curves formed by quasi-periodic solution. III. *Astron and Astrophys*, 41, 187-198. [in English]
  10. Gavin H.P. (2014) Generalized Coordinates, Lagrange's Equations, and Constraints. CEE 541. Structural Dynamics. Department of Civil and Environmental Engineering Duke University, 23 [in English]
  11. Aldoshin ul. T., Yakovlev S. (2012) Dynamics ducking springs with a double. *Vestenik Spbgu*, 1, 4, 45-52. [in Russian]
  12. Semkiv O., Shoman O., Sukharkova E., Zhurilo A., Fedchenko H. (2017) Development of Projection Technique for Determining the Non-Chaotic Oscillation Trajectories in the Conservative Pendulum Systems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. Mathematics and Cybernetics – Applied Aspects*. 2, 4 (86), 48–57. [in English]
  13. Kutsenko L., Vanin V., Shoman O., Yablonskiy P., Zapol'skiy L., Hrytsyna N., Nazarenko S., Danylenko V., Sivak E., Shevchenko S. (2019) Modeling the resonance of a swinging spring based on the synthesis of a motion trajectory of its load. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies: Applied mechanics*, 7, 53-64. [in English]
  14. Semkiv O.M., Shevchenko S.M. (2020) Computer simulation of the trajectory of movement of the cargo of a swinging spring with a moving suspension point. *Znanstvena Musel Journal. Sloveniya*, 1, 40, 54-66. [in Ukrainian]
  15. Kutsenko, L.M. Pिकासов M.M., Zapol's'kiy L.L. (2018) Illustrations for the article "Geometric modeling of the periodic trajectory of the load of the swinging spring" URL: <http://repositsc.nuczu.edu.ua/handle/123456789/7637>. [in Ukrainian]