УДК 514.18

АНАЛІЗ ПОВЕДІНКИ ПОХИБКИ ОБЧИСЛЕНЬ ПРИ ГАУС-ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ФУНКЦІЇ РУНГЕ

Сидоренко Ю.В., к.т.н.,
sulico@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1953-0410
Залевська О.В., к.т.н.,
o.zalevska@kpi.ua, ORCID: 0000-0002-3163-1695
Городецький М.В.
o.zalevska@kpi.ua, ORCID: 0000-0003-4673-3894
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (Україна)
Спірінцев Д.В., к.т.н.,
spirintsev@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5728-6626
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (Україна)

У статті розглядається похибка обчислень при застосуванні до функції Рунге Гаус-інтерполяції. Зменшення похибки відбувається за рахунок автоматичного підбору варіативного коефіцієнта. Наводяться приклади роботи комп’ютерної програми інтерполяції трьома видами Гаус-функцій та порівнюються результати з похибками метода Лагранжа.

У наш час прикладів використання інтерполяції можна навести безліч, від виготовлення механічних деталей на виробництві, фільтрації шумів, ресемплінгу, загущення сигналів, та інше у сфері обробки даних і до виділення трендів в економіці. Людина зіштовхується з застосуванням інтерполяції в найнеочікуваніших областях свого повсякденного життя. Візьмемо для прикладу мобільні телефони. В технічних характеристиках веб-камери телефону написана роздільна здатність, наприклад, 460 × 800 пікселів а також указано, що камера допускає інтерполяцію зображення з приведенням більш високої роздільної здатності. Це означає, що перетворення зображення, як при збільшенні, так і при зменшенні фотографії, наприклад, проводиться за допомогою інтерполяції. Інтерполяція працює також і з колірним спектром.

Зазвичай для проведення інтерполяції класична література пропонує скористатись методом Лагранжа. При аналізі використання методу Лагранжа було виявлено деякі недоліки. Так, цей метод використовується при чисельній оцінці похідної функції за її дискретними значеннями, але для обробки експериментальних даних не завжди доцільно його використовувати.

Метою досліджень є аналіз недоліків використання методу Лагранжа на прикладі функції Рунге. У статті запропоновано інтерполювати цю

функцію за допомогою трьох видів функції Гауса, показано переваги цього підходу для розв'язання класичної задачі інтерполяції функції Рунге.

Ключові слова: інтерполяція, інтерполяційна функція Гауса, похибка інтерполяції, феномен Рунге.

Постановка проблеми. До класичних методів інтерполяції можна віднести метод Лагранжа. Але не завжди отриманий результат може влаштовувати із-за великих похибок при великому масиві заданих точок. Іноді задана функція має 0 у заданих точках (наприклад, при розв'язанні багатоточкової крайової задачі для звичайних диференційних рівнянь. Або функція, що інтерполюється, приймає великі значення, наприклад, кількість захворювання на COVID-19 за певний період часу. Авторам не вдалося знайти загальну теорію побудови поліномів, які приймають задані значення у заздалегідь заданій системі точок і найменш відхиляються від заданих значень.

Класичним прикладом зростання похибки при збільшенні вузлів інтерполяції є феномен Рунге. Для запобігання зростання похибки було запропоновано для розв'язання цієї задачі використати Гаусс-інтерполяцію.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі [1] наведено суть феномена Рунге, сформульовано умови виникнення великої похибки при інтерполяції методом Лагранжа. У роботі [2] надано перелік можливостей уникнути великих похибок за допомогою використання поліномів Чебишова. Метод фрактальної апроксимації даних неперервною, в кожній точці не диференційованою функцією, що дозволяє побудувати математичну модель експерименту для більш широкого класу задач розглянуто у роботі [3]. У [4] розглядається інтерполяція дискретних даних тривимірними клітинними автоматами, що дозволяє відтворити процес розвитку системи.

Поняття Гаус-інтерполяції надано в роботі [5], приведено формули прямої інтерполяційної функції Гауса та її варіантів, а саме параметричної та сумарної. В роботі [6] проведено аналіз роботи інтерполяційної функції Гауса на елементарних алгебричних функціях, розраховано похибки обчислень. Алгоритм зменшення похибки інтерполяції методами Гауса та низка прикладів за допомогою створеної програмної програми, які довели доцільність використання цього алгоритму, наведено у роботі [7].

Формулювання цілей статті. Метою дослідження є аналіз результатів інтерполяції функції Рунге за допомогою трьох видів інтерполяційної функції Гауса та порівняння результатів з методом Лагранжа.

Основна частина. У теперішній час задача інтерполяції набуває великого значення, так як прикладів використання інтерполяції можна навести величезну кількість. від розв'язання суто технічних задач, коли, наприклад, дані отримані з креслення, з якого конструктор отримав профіль кулачка для забезпечення, скажімо, необхідного закону руху штовхача, і необхідно відтворити, скажімо архімедову спіраль за цими даними, тобто отримати результат чисельного розв’язання з достатньою точністю, до розв’язання задач у сучасних напрямках розвитку науки, таких як фінансова економіка, або фрактальна геометрія.

Методи розв’язання задачі інтерполяції також зазнали змін, але класичні методі досі широко використовуються на практиці. Одним з класичних методів є метод Лагранжа.

Поліном Лагранжа має такий вигляд:

$$P_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}y_i\,.$$

Метод Лагранжа має свої переваги і недоліки. Основним недоліком цього методу є те, що похибка обчислень різко зростає при збільшенні кількості вузлів інтерполяції. Цей недолік описано в так званому феномені Рунге.

За висхідну криву обрано функцію Рунге:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Рунге виявив, що для такого виду кривих верхня границя похибки інтерполяції прямує до нескінченності, коли кількість вузлів, а з нею і ступінь полінома, зростає, як показано на рис. 1.

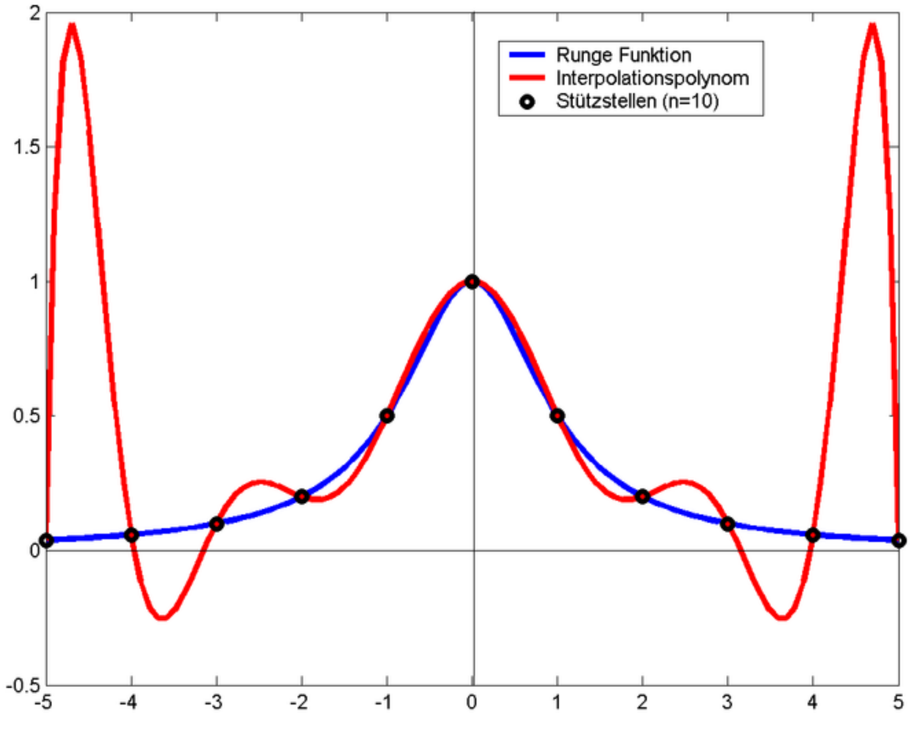

Рис. 1. Феномен Рунге

У даній роботі було запропоновано для інтерполяції функції Рунге використати Гаус-функцію такого вигляду:

$$G(x) = \tilde{y}_1 e^{-\alpha(x-x_1)^2} + \tilde{y}_2 e^{-\alpha(x-x_2)^2} + \ldots + \tilde{y}_n e^{-\alpha(x-x_n)^2}.$$

Для отримання параметричного запису функцій Гауса можна записати систему такого вигляду, де кожна з функцій буде інтерполяційною функцією Гауса:

$$\begin{cases} X(t_i) = \mathrm{x}(i) \\ Y(t_i) = \mathrm{y}(i) \end{cases};$$

Варіативний параметр α як правило обчислюють за формулою:

$$\alpha = \frac{\pi(n-1)}{(x_{\max} - x_{\min})^2},$$

де x_{max}, x_{min} — максимальне та мінімальне значення аргументу x.

Візуалізація результатів інтерполяції та підрахунок похибки обчислень проводились за допомогою комп'ютерної програми, написаної у програмному середовищі *Microsoft Visual Studio 2020*, мовою *C#*.

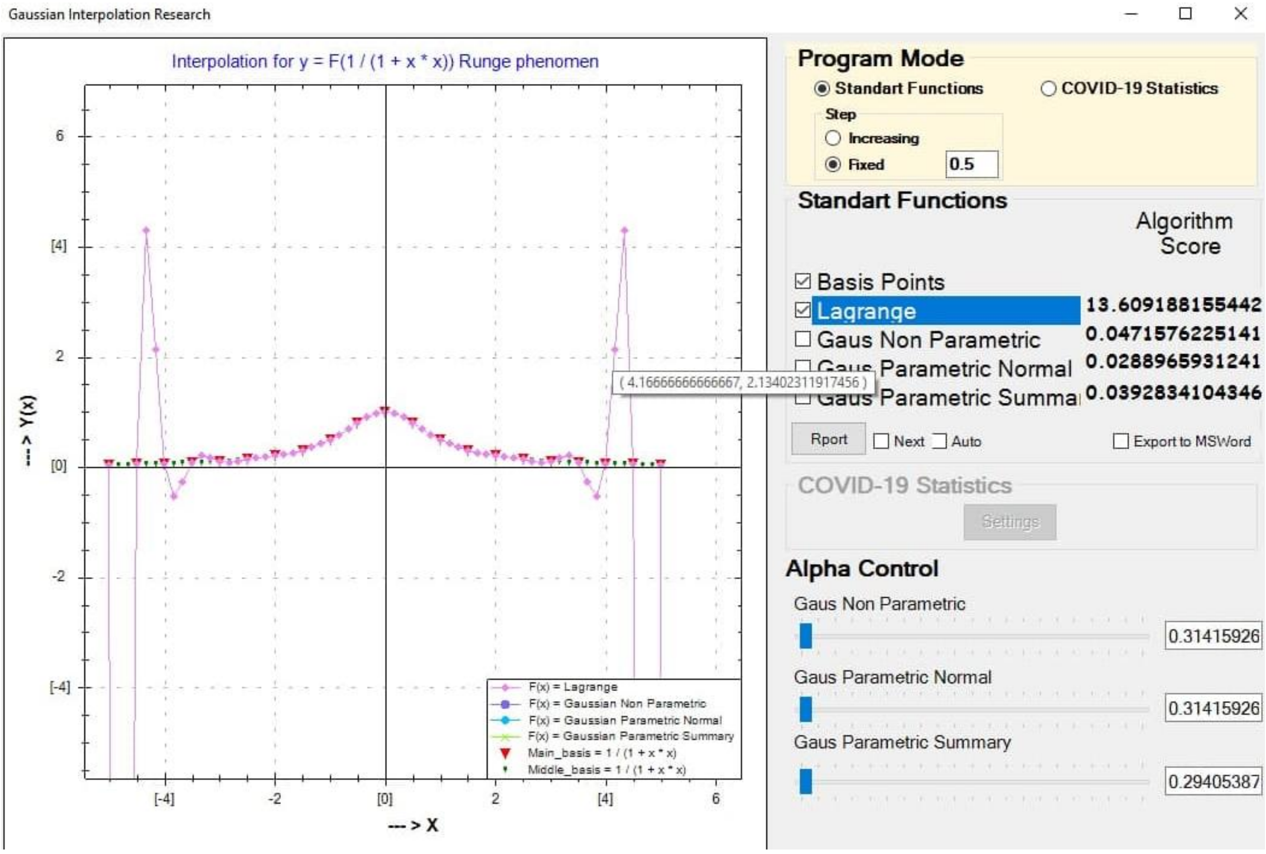

Рис. 2. Інтерполяція функції Рунге поліномом Лагранжа

На рис. 2 представлено результати інтерполяції функції Рунге та похибку інтерполяції при 20 точках каркасу методом Лагранжа. Очевидно, що результати не можуть бути прийнятні для подальших розрахунків, особливо на кінцях відрізку, що підтверджує феномен Рунге.

На рис. 3 наведено результат інтерполяції за допомогою звичайної функції Гауса.

Результат інтерполяції значно кращій за метод Лагранжа, але на кінцях відрізку все ще присутні значні відхилення.

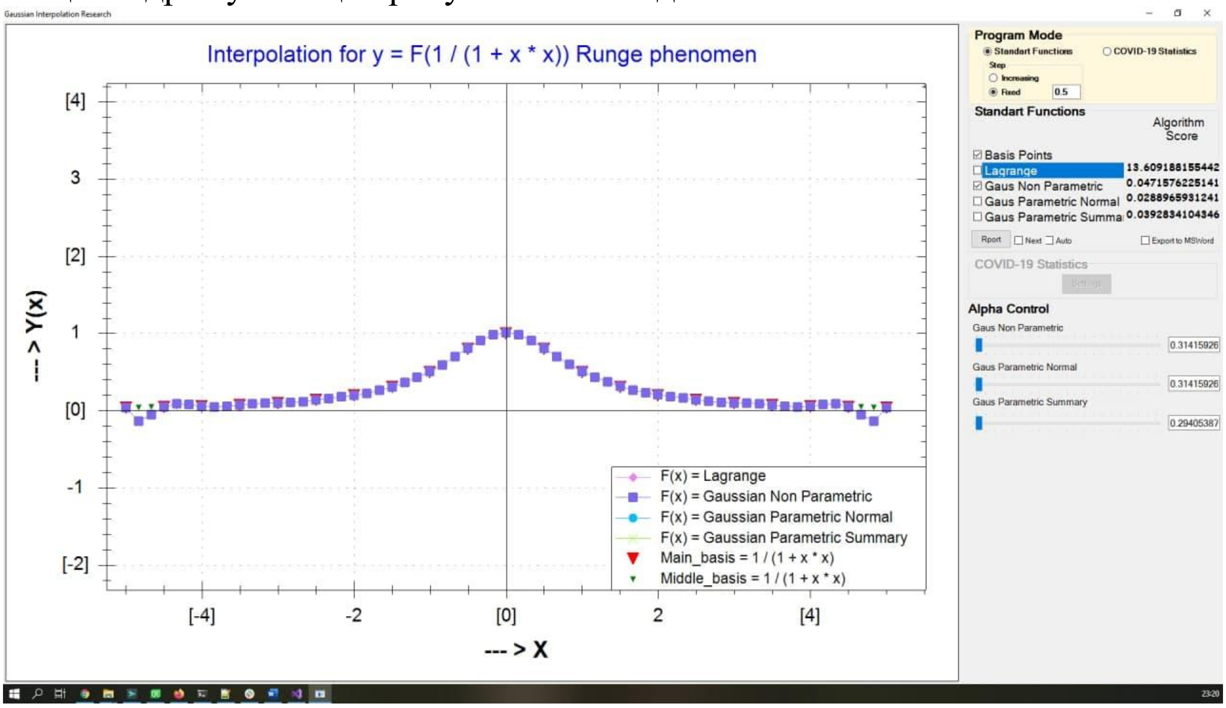

Рис. 3 Інтерполяція функції Рунге звичайною Гаус-функцією

На рис. 4 наведено результати інтерполяції за допомогою параметричної функції Гауса.

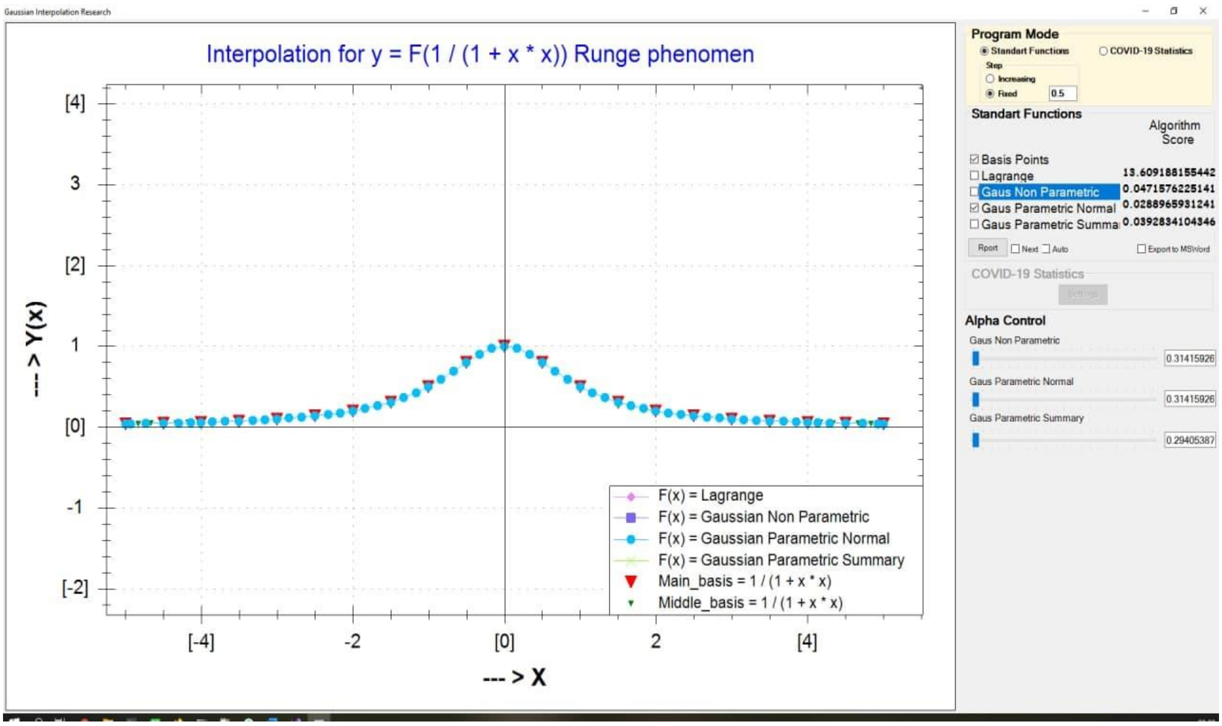

Рис. 4. Інтерполяція функції Рунге параметричною Гаус-функцією

Похибка інтерполяції на декілька порядків нижча, ніж при інтерполяції методом Лагранжа. На кінцях відрізку також похибка низька.

Результати інтерполяції за допомогою сумарної функції Гауса наведено на рис. 5.

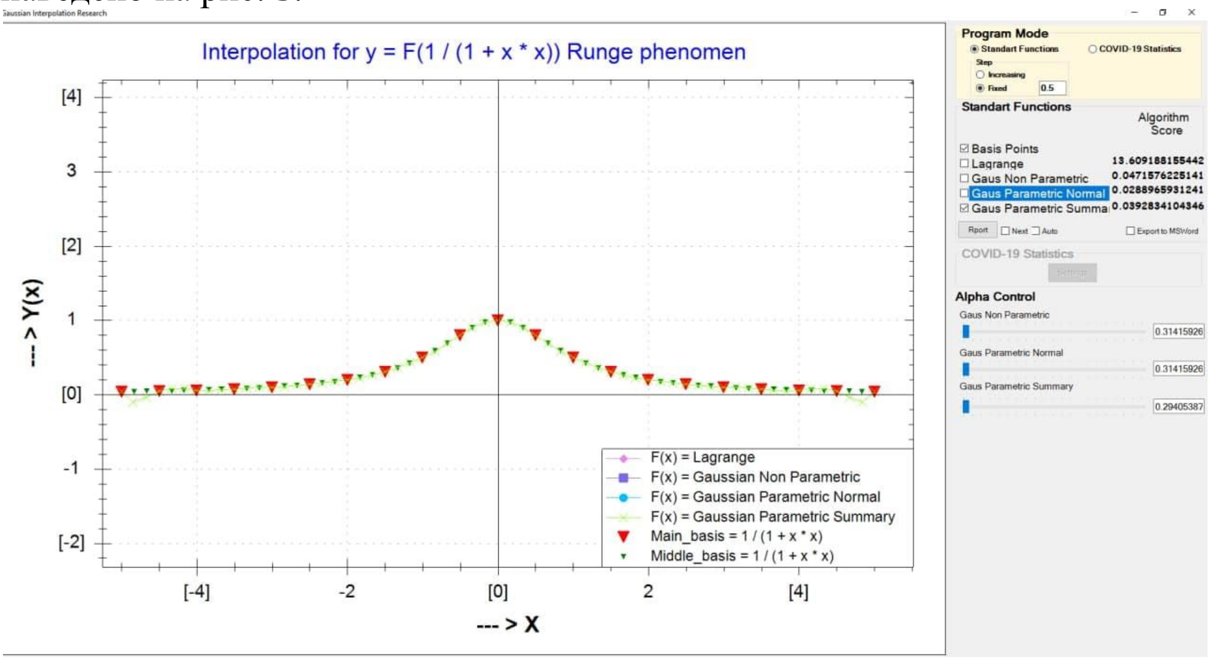

Рис. 5. Інтерполяція функції Рунге сумарною Гаус-функцією

Як видно і з рисунку, і з обчислень, які представлені на екрані, похибка інтерполяції є задовільною. Таким чином, функція Гауса вирішує проблему феномена Рунге.

Похибку обчислень можна ще зменшити. У комп'ютерній системі передбачена можливість варіювати параметром α. У правому нижньому куті екрана є прокрутка для зміни цього параметра. Також можна ввести алгоритм автоматичного підбору α з найменшою результуючою похибкою.

Висновки. Було проведено аналіз недоліків використання методу Лагранжа на прикладі функції Рунге, що має назву феномен Рунге та запропоновано інтерполювати цю функцію за допомогою трьох видів функції Гауса. Результати, отримані за допомогою комп'ютерної системи, показали переваги цього підходу. Похибку можна зменшити за допомогою надання варіативному параметру α інших значень.

Література

1. Heath, Michael (2000). Scientific Computing. McGraw-Hill. с. 324.
2. Хованский А.Г. Полиномы Чебышёва и их обращения. *Математическое просвещение,* 2013. Вып. 17. С. 93-106.
3. Ванін В.В., Залевська О.В. Опис стійких положень динамічних систем засобами фрактальної апроксимації. *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь, 2015, Вип. 4. С.18-22.

4. O. Zalevska et al., "Construction and study of the mathematical model for the system using three-dimensional cellular automata," 2021 ieee 16th international conference on the experience of designing and application of cad systems (cadsm), 2021, pp. 49-52.
5. Сидоренко, Ю.В. Параметрична інтерполяційна функція Гауса. *Комп'ютерне моделювання в хімії і технологіях та системах сталого розвитку*, Київ, 2014. С. 67-73.
6. Сидоренко, Ю.В., Городецький М.В. Аналіз роботи алгоритму інтерполяційної функції Гауса на елементарних алгебричних функціях. *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь, 2020. Вип.19.С.138-146.
7. Sydorenko Yu. V., Horodetskyi M.V. Modification of the algorithm for selecting a variable parameter of the Gaussian interpolation function. Control Systems and Computers, 2020, Issue 6 (290), pp. 21-28.

АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ОШИБКИ ВІЧИСЛЕНИЯ ПРИ ГАУС-ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИИ РУНГЕ

Сидоренко Ю.В., Залевская О.В. Городецкий Н.В., Спиринцев Д.В.

В статье рассматривается погрешность вычислений при применении к функции Рунге Гаусс-интерполяции. Уменьшение погрешности происходит за счёт автоматического подбора вариативного коэффициента. Приводятся примеры работы компьютерной программы интерполяции тремя видами Гаусс-функций и сравниваются результаты с погрешностями метода Лагранжа.

В настоящее время примеров использования интерполяции можно привести множество, от изготовления механических деталей на производстве, фильтрации шумов, ресемплинга, загущения сигналов и прочего в сфере обработки данных и до выделения трендов в экономике. Человек сталкивается с применением интерполирования в самых неожиданных областях своей повседневной жизни. Возьмем для примера мобильные телефоны. В технических характеристиках веб-камеры телефона написано разрешение, например, 460 × 800 пикселей, а также указано, что камера допускает интерполяцию изображения с приведением более высокого разрешения. Это означает, что преобразование изображения, как при увеличении, так и при уменьшении фотографии, например, производится посредством интерполяции. Интерполирование работает также и с цветовым спектром.

Обычно для проведения интерполяции классическая литература предлагает использовать метод Лагранжа. При анализе использования метода Лагранжа были обнаружены некоторые недостатки. Так, этот метод используется при численной оценке производной функции по ее *дискретным значениям, но для обработки экспериментальных данных не всегда целесообразно его использовать.*

Целью исследований является анализ недостатков использования метода Лагранжа на примере функции Рунге. В статье предложено интерполировать эту функцию с помощью трех видов функции Гаусса, показаны преимущества этого подхода для решения классической задачи интерполирования функции Рунге.

Ключевые слова: интерполяция, интерполяционная функция Гаусса, погрешность интерполяции, феномен Рунге.

ANALYSIS OF CALCULATION ERROR BEHAVIOR IN GAUSS INTERPOLATION OF RUNGE FUNCTION

Sydorenko Iuliia, Zalevska Olga, Horodetskyi Mykola, Spirintsev Dmytro

The paper considers the calculation error when applying Gaussian interpolation to the Runge function. The error is reduced by automatically selecting the variable coefficient. Examples of a computer program for interpolation of three Gaussian functions types are given and the results are compared with the errors of the Lagrange method.

Nowadays, there are many examples of using interpolation, from the manufacture of mechanical parts in production, noise filtering, resampling, signal compression, etc. in the field of data processing and highlighting trends in the economy. Humanity is faced with the use of interpolation in the most unexpected areas of its daily lives. For example, the specifications of a phone's webcam have a resolution 460 × 800 pixels and it is also indicated that the camera can do image interpolation to achieve a higher resolution. This means that image conversion, both when zooming in and out, is done by interpolation. Interpolation also works with a color spectrum.

Usually, for interpolation, classical literature suggests using the Lagrange method. The analysis of the use of the Lagrange method revealed some shortcomings. This method is used in the numerical estimation of the derivative function by its discrete values, but it is not always advisable to use it to process experimental data.

The aim of the research is to analyze the disadvantages of using the Lagrange method on the example of the Runge function. The paper proposes to interpolate this function using three types of Gaussian function, the advantages of this approach for solving the classical Runge function interpolation problem are shown.

Keywords: interpolation, Gaussian interpolation function, interpolation error, Runge phenomenon.

Referenses

1. Heath, Michael (2000). Scientific Computing. McGraw-Hill. с. 324. [in English]
2. Khovansky, AG (2013). Chebyshev polynomials and their inversions. Mathematical education. 17, 93-106. [in Ukrainian]
3. Vanin, V.V., Zalevskaya, O.V. (2015) Description of stable positions of dynamical systems by means of fractal approximation. Modern problems of modeling. Melitopol, 4, 18-22 [in Ukrainian]
4. O. Zalevska et al., (2021) "Construction and study of the mathematical model for the system using three-dimensional cellular automata," 2021 ieee 16th international conference on the experience of designing and application of cad systems (cadsm), 49-52. [in English]
5. Sidorenko, Yu.V. (2014) Parametric Gaussian interpolation function. Computer modeling in chemistry and technology and sustainable development systems KMHT, 67-73. [in Ukrainian]
6. Sidorenko, Yu.V., Gorodetsky M.V. (2020) Analysis of the algorithm of the Gaussian interpolation function on elementary algebraic functions. Modern problems of modeling. 19, 138-146. [in Ukrainian]
7. Sydorenko Yu.V., Horodetskyi M.V. (2020) Modification of the algorithm for selecting a variable parameter of the Gaussian interpolation function. Control Systems and Computers, 6 (290), 21-28. [in English]