

УДК 514.18

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОБОЧИХ ПРОФІЛІВ І ОБ'ЄМІВ РОТОРНО-ПЛАНЕТАРНИХ МАШИН

Куценко Л. М., д.т.н.,

leokuts@i.ua ORCID: 0000-0003-1554-8848

Національний університет цивільного захисту України, (м. Харків, Україна)

Адашевська І. Ю., к.т.н.,

adashevskai.iri@gmail.net, ORCID: 0000-0001-5447-5114

Шеліхова І. Б., к.т.н.,

inessa.shelikhova@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5637-1850

Національний технічний університет ХПІ (м. Харків, Україна)

Наведено спосіб розрахунку роторно-планетарних машин системи Ванкеля. Особливість машини Ванкеля полягає у тому, що рух ротора відносно корпусу здійснюється за допомогою планетарного механізму, основу якого складає зубчата передача внутрішнього зчеплення.

Запропонований спосіб дозволяє врахувати зв'язок параметрів геометричних форми двох пар взаємоспряжених кривих, характерних для машин системи Ванкеля. Першу пару кривих складають робочі профілі корпусу і ротора. Другу пару утворюють профілі зубів зубчатих коліс внутрішнього зчеплення. Врахування зазначеного зв'язку дозволило знайти опис функції зміни у часі робочих об'ємів, обмежених профілями корпусу і ротора (тобто визначити продуктивність машини).

В результаті досліджень було встановлено, що продуктивність машини Ванкеля можливо знайти за умови врахування трьох особливостей цієї машини. Формоутворення спряжених робочих профілів ротора і статора здійснюється за допомогою планетарного механізму, для розрахунку яких в роботі використано функції комплексних змінних. Функцію продуктивності машини визначає зміна у часі об'ємів простору, обмежених робочими профілями ротора і корпусу. Наближений опис функцій зміни у часі робочих об'ємів машини було здійснено за допомогою спеціально розроблених графічних побудов. Для погодження геометричних параметрів машини Ванкеля з параметрами профілів зубів зубчастої передачі внутрішнього зчеплення в роботі застосовано метод графічної обкатки.

Одержані результати корисні тому, що схему розглянутої машини Ванкеля закладено в конструкцію однойменного двигуна внутрішнього згорання, а також, в конструкції різноманітних гідромашин, насосів, компресорів, тощо.

Ключові слова: геометричне моделювання, роторно-планетарна машина, функції комплексної змінної, зубчата передача внутрішнього зачеплення.

Постановка проблеми. Переконливий приклад важливості досліджень геометричних розрахунків представляють роторно-планетарні машини трохойдного типу. Причина складності дослідження геометричних форм робочих профілів таких машин полягає у використанні планетарного механізму внутрішнього зчеплення для надання ротору обертового руху відносно корпусу. В результаті чого профілі корпусу і ротора набувають вигляд спеціальних кривих - трохойд та їх обвідних. Серед прикладів таких виробів слід назвати роторно-планетарні двигуни Ванкеля, які застосовуються в авіації, судно- і автомобілебудуванні [1, 2]. Ознакою роторно-планетарної машини є наявність в її конструкції планетарного механізму, призначеного для переміщення ротора відносно корпусу машини. Роторно-планетарна машина (циліндричного типу) складається із корпусу, дві бокові поверхні якого утворюють робочий простір, де рухається ротор трикутної форми (трикутник Релло). Головною характеристикою роторно-планетарної машини є її продуктивність. Тобто який об'єм речовини вона може «перекачати» за один оберт трикутного ротора. Характеристику продуктивності машини доцільно пов'язати з обчисленням у часі об'ємів її робочих камер. У випадку циліндричного виконання ця задача зводиться до визначення функції зміни в часі площі фігур, які при обкатці розташовані між трикутником Релло і профілем корпусу. Тобто «на виході» розрахунків конструкції роторно-планетарної машини повинна бути функція її продуктивності.

Для коректного розрахунку роторно-планетарної машини необхідно погодити геометричні форми двох пар априорі взаємоспряжених кривих. Першу пару кривих складають робочі профілі корпусу і ротора. В процесі руху ротора необхідно забезпечити постійний точковий контакт зі стінками корпусу. Наявність планетарного механізму ускладнює закон їх взаємного переміщення. Другу пару кривих складають профілі зубів зубчатих коліс внутрішнього зчеплення. Для погодження цих пар кривих необхідно здійснити їх побудову з використанням одних і тих наперед обраних параметрів. При цьому «побіжно» необхідно знайти цільову функцію – тобто опис продуктивності машини як функцію зміни у часі робочих об'ємів, обмежених профілями корпусу і ротора. Таким чином, «на вході» розрахунків повинні бути числові параметри, пов'язані з конструкцією роторно-планетарної машини, а «на виході» повинна бути шукана функція продуктивності роторно-планетарної машини.

Перераховане вказує на актуальність обраної проблеми для подальшого розвитку наукових основ розрахунку роторно-планетарних машин трохойдного типу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботі [1] наведено загальні відомості про розрахунки профілів корпусів і роторів роторно-планетарних машин. При цьому опис здійснюється з використанням параметричного представлення формул, а також з елементами функцій комплексних змінних. Методи визначення зміни у часі об'ємів їх робочих

камер базуються на обчисленні еліптичних інтегралів. Але такі описи не є зручними для алгоритмів геометричного (і анімаційного) моделювання. Характерною ознакою роторно - планетарних машин трохоїдного типу є те, що ротор здійснює свій обертовий рух в корпусі за допомогою планетарного механізму. При цьому профілями корпусу і ротора мають бути спеціальні криві - трохоїди та їх обвідні [1]. Але на практиці, при проектуванні реальних виробів, із-за недосконалості методів профілювання фрагменти названих кривих звичайно замінювалися дугами кіл, що не завжди відповідало дійсності. Результати такої заміни проявляються у тому, що деякі виготовлені вироби мають незначний ресурс експлуатації і невелику надійність. Знайти адекватний опис профілю корпусу і ротора можливо лише за допомогою геометричного моделювання різновидів обкатки планетарним механізмом. Крім того, важливим показником (інтегральною характеристикою) роторно-планетарних гідромашин трохоїдного типу є їх витрати в часі (продуктивність), які бажано обчислювати з використанням геометричних моделей. Усунення недоліків опису деталей роторно-планетарних виробів дугами кіл, та розробка інженерного методу визначення зміни у часі об'ємів їх робочих камер сприятиме розробці нових підходів до розрахунків профілів корпусів і роторів роторно-планетарних машин.

На розвиток цього напрямку досліджень сприяють роботи [2, 3], де започатковано дослідження з анімаційного моделювання результату обкатки планетарним механізмом. При цьому ще не повністю дослідженими залишилися питання алгоритмічної реалізації взаємосп'яжених кривих за допомогою функцій комплексного змінного, та обчислення функцій зміни у часі інтегральних характеристик фігур, обмежених цими кривими. В роботі [4] запропоновано спосіб опису профілю корпусу з застосуванням двох основних параметрів – параметр розміру кривої та параметру ексцентриситету. Але автором не досліджено основні переваги цієї форми опису, особливо в разі її програмної реалізації. В роботі [5] наведено опис взаємосп'яжених кривих профілів ротора і корпусу за допомогою функцій комплексного змінного. Проте не дослідженими залишилися питання включення зазначених описів до програмної реалізації з врахуванням форми зубів зубчастої передачі планетарного механізму. В роботі [6] наведено спосіб опису трикутника Релло як елемента роторно-планетарної машини. При цьому також не враховуються форми зубів зубчастої передачі планетарного механізму. В роботі [7] описано елементи геометричної обкатки для профілювання зубчатих коліс внутрішнього зчеплення. Однак, загальних формул для складання алгоритму не наведено. Одержані результати можна порівняти з результатами робіт [8, 9].

Отже, в результаті огляду виявлені питання, ще не досліджені іншими авторами, що дозволило сформулювати наступний напрямок досліджень. Розробити спосіб розрахунку роторно-планетарної машини типу Ванкеля

на основі геометричного моделювання робочих профілів і зміни робочих об'ємів в часі за умови погодження з параметрами зубчатих передач.

Формулювання цілей статті. Метою дослідження є розробка способу розрахунку роторно-планетарної машини типу Ванкеля на основі геометричного моделювання робочих профілів і зміни робочих об'ємів в часі за умови погодження початкових даних з параметрами зубчатих передач.

Основна частина. В роботах [4-6] наведено описи робочих контурів ротора і статора роторно-планетарної машини. Спрощений опис профілю ротора Релло (при «нульовому» значенні параметра обкатки) має вигляд:

$$x(\varphi) = \frac{d \cos t}{\left| \cos \frac{3\varphi}{4} \right| + \left| \sin \frac{3\varphi}{4} \right|}; \quad y(\varphi) = \frac{d \sin \varphi}{\left| \cos \frac{3\varphi}{4} \right| + \left| \sin \frac{3\varphi}{4} \right|}. \quad (1)$$

При цьому рівняння профілю корпуса матимуть вигляд:

$$x = \cos \varphi + d \cos \left(\frac{\varphi}{3} \right); \quad y = \sin \varphi + d \sin \left(\frac{\varphi}{3} \right). \quad (2)$$

Тут φ - параметр обкатки; d - параметр розміру профілів ротора і корпуса.

Для геометричного моделювання робочих об'ємів роторно-планетарних машин пропонується наближений метод розрахунку за вузловими точками площі між трохоїдою та її обвідними. Для визначеності розглянемо роторно-планетарні машини у циліндричному виконанні. Тоді робочі об'єми машин будуть пропорційні площам (плоских) фігур, які розташовані між обвідними параметричних сімей трохоїд і миттєвими положеннями трохоїди в процесі її обкатки планетарним механізмом.

Метод полягає у тому, що спочатку вузлові точки синхронно „розставляються” на внутрішній та зовнішній обвідних. Далі ці точки сполучаються відрізками і визначаються точки перетину одержаних відрізків з миттєвим положенням трохоїди в процесі її обкатки. В процесі обкатки планетарним механізмом трохоїди будуть змінюватися області площини, які розташовані між миттєвими положеннями цієї трохоїди та обвідними. При цьому області можуть бути і багатозв'язними. Це затрудняє обчислення площ за допомогою „прямого” інтегрування, адже при цьому необхідно розв'язати проблему автоматичного визначення меж інтегрування. Крім того, якщо ця проблемі і буде розв'язана, то для традиційних способів виникне нова проблема, пов'язана з обчисленням еліптичних інтегралів. Але еліптичні інтеграли точно не обчислюються, а алгоритми наближеного їх обчислення не є наочними. Тому доцільною буде розробка інженерного метода обчислення площ зазначених фігур.

Нехай робочий профіль корпуса задано параметричними рівняннями $x = x(t)$ і $y = y(t)$. Для складання масивів вузлових точок, які будуть розташовані на обвідних, позначимо $t_i = \frac{i t_1}{N}$. Масив значення абсцис $XX[i]$

і ординат $YY[i]$ для зовнішньої обвідної слід сформулювати за правилами:

$$\begin{aligned}
 XX[i] &= x(t_i); & YY[i] &= y(t_i); \\
 XX[i+N] &= x(t_i - t_1 + \pi); & YY[i+N] &= y(t_i - t_1 + \pi); \\
 XX[i+2N] &= x(t_i + \pi); & YY[i+2N] &= y(t_i + \pi); \\
 XX[i+3N] &= x(t_i - t_1 + 2\pi); & YY[i+3N] &= y(t_i - t_1 + 2\pi); \\
 XX[i+4N] &= x(t_i + 2\pi); & YY[i+4N] &= y(t_i + 2\pi); \\
 XX[i+5N] &= x(t_i - t_1); & YY[i+5N] &= y(t_i - t_1);
 \end{aligned}$$

Позначимо $t_i = \frac{i \left(t_2 - \frac{\pi}{2} \right)}{N}$ для складання масивів вузлових значень абсцис $XX[i]$ і ординат $YY[i]$ точок для внутрішньої обвідної, які слід сформулювати за правилами:

$$\begin{aligned}
 xx[i] &= x\left(t_i + \frac{\pi}{2}\right); & yy[i] &= y\left(t_i + \frac{\pi}{2}\right); \\
 xx[i+N] &= x(t_i - t_2 + \pi); & yy[i+N] &= y(t_i - t_2 + \pi); \\
 xx[i+2N] &= x\left(t_i + \frac{3\pi}{2}\right); & yy[i+2N] &= y\left(t_i + \frac{3\pi}{2}\right); \\
 xx[i+3N] &= x(t_i - t_2 + 2\pi); & yy[i+3N] &= y(t_i - t_2 + 2\pi); \\
 xx[i+4N] &= x\left(t_i + \frac{5\pi}{2}\right); & yy[i+4N] &= y\left(t_i + \frac{5\pi}{2}\right); \\
 xx[i+5N] &= x(t_i - t_2); & yy[i+5N] &= y(t_i - t_2).
 \end{aligned}$$

Такі правила формування масивів дозволяють розташувати вузлові точки підряд і синхронно на обох обвідних за умови їх проходження проти напрямку годинникової стрілки. В результаті цього можна скласти $6N$ рівнянь прямих, які проходять через пари точок

$$x = xx[i] + p(XX[i] - xx[i]); \quad y = yy[i] + p(YY[i] - yy[i]). \quad (3)$$

На рис. 1 при $N = 15$ і $d = 12$ наведено зображення двох обвідних, вузлові точки на яких сполучені відріzkами.

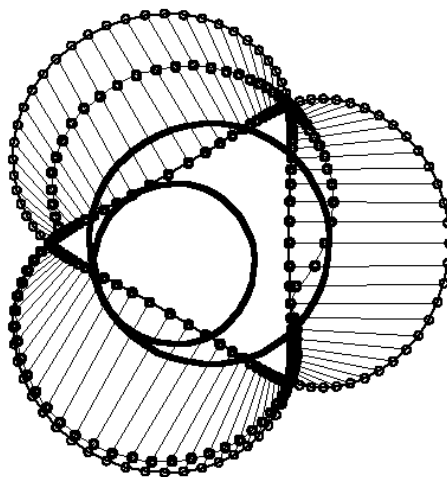


Рис. 1. Розташування вузлових точок на обвідних для одного з миттєвих положень епітрохіди

Площі чотирикутників обчислюємо за формулою Герона після розбиття їх на два трикутники. Після підсумовування площ всіх прямокутників одержимо наближене значення двох площ між епітрохідою і кожною з обвідних. Змінюючи кут ν , одержуємо графік зміни площ в залежності від кута оберту епітрохіди ν . У збіжності обчислювального процесу можна перекопати шляхом подвоєння значення N .

На рис. 2 наведено графік функції $S_{2\nu n}$, який визначає зміну площі між епітрохідою і внутрішньою обвідною. Також можна визначити і графік функції $S_{2\nu na}$, який визначає зміну площі між епітрохідою і зовнішньою обвідною. Ці графіки будуть симетричними відносно горизонталі, розташовані на однакових відстанях від екстремальних значень функції $S_{2\nu n}$.

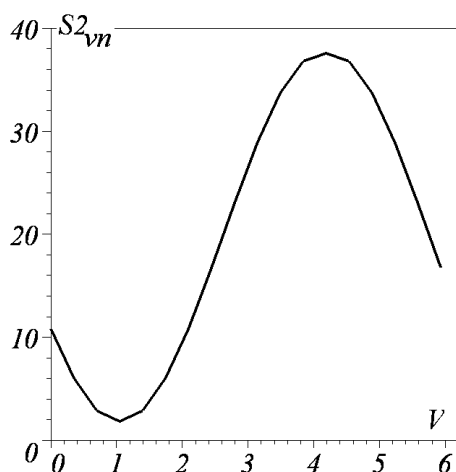


Рис. 2. Графік залежності площ між миттєвими положеннями епітрохіди і внутрішньою обвідною

Наведемо геометричне моделювання профілів зубів внутрішнього зубчатого зчеплення як взаємоспряжених кривих. При цьому форма зубів нерухомого колеса з діляльним колом R_1 визначається в результаті

комп'ютерної обкатки рухомого колеса з ділильним колом R_2 як обвідна миттєвих положень зубів за умови, що обкатка узгоджена відносно спряженості профілів ротора і корпуса роторно-планетарної машини трохідного типу. Нехай зуб, що формується, пов'язаний з нерухомою системою координат Oxy , а вихідний зуб разом з рухомою системою координат $O'x'y'$ здійснює процес обкатки за схемою планетарного механізму. Тобто коли ділильне коло більшого радіуса котиться без проковзування своєю внутрішньою частиною по нерухомому ділильному колу меншого радіуса (рис. 3).

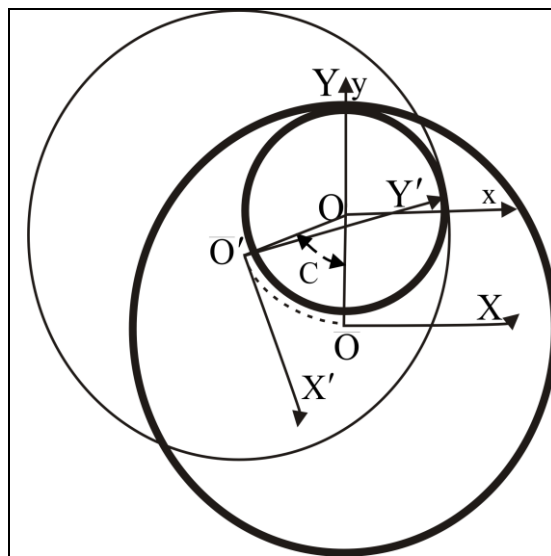


Рис. 3. Пояснення формул зв'язку між системами координат

Тоді зв'язок між системами координат має вигляд:

$$\begin{aligned} X &= x \cos C + y \sin C - (R_2 - R_1) \cos 2C; \\ Y &= -x \sin C + y \cos C - (R_2 - R_1) \sin 2C. \end{aligned} \quad (4)$$

Опис профілів зубів рухомого зубчатого колеса мають вигляд:

$$x = Z(t) \cos \varphi; \quad y = Z(t) \sin \varphi, \quad (5)$$

де $Z = Z(t)$ – рівняння виробляючого контуру (не плутати з вихідним контуром). Наприклад, коли

$$Z = R_2 + H \operatorname{signum} \left(\sin \frac{NR_2 t}{2R_1} \right). \quad (6)$$

У формулах φ – параметр обкатки; t – параметр форми зубів; H – висота зуба рухомого колеса; N – кількість зубів нерухомого (пасивного) колеса; $N_p = NR_2/R_1$ – кількість зубів рухомого (активного) колеса. На рис. 4

зображено зубчате колесо меандрового типу для рухомого кола радіуса $R_2 = 30$, повної висоти зуба $H = 3$ і $N_p = 30$.

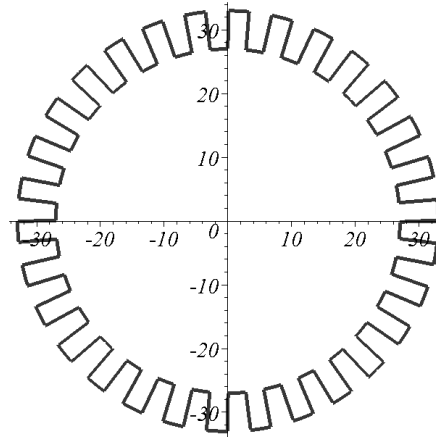


Рис. 4. Приклад зубчатого колеса меандрового типу

Обкатку рухомим зубчатым колесом опишемо за допомогою формул

$$x = w_1 \cos \frac{C}{2} + w_2 \sin \frac{C}{2}; \quad y = w_2 \cos \frac{C}{2} - w_1 \sin \frac{C}{2}, \quad (7)$$

де

$$w_1 = Z \left(\frac{NR_2 h_t}{2\pi R_1} \right) \cos t - \sin C; \quad w_2 = Z \left(\frac{NR_2 h_t}{2\pi R_1} \right) \sin t - \cos C.$$

На рис. 5 зображено окрему фазу обкатки зубчатого колеса меандрового типу сумісно з робочими профілями корпусу і ротора.

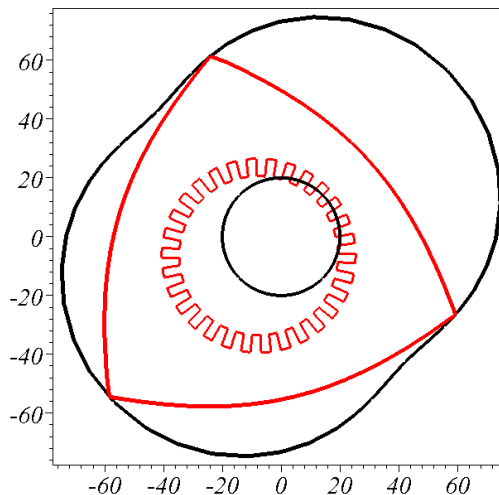


Рис. 5. Одна з миттєвих фаз обкатки зубчатым колесом меандрового типу

Результатом одержаної обкатки колеса меандрового типу буде обвідна спеціальної форми. На рис. 6 вона обмежує контур незафарбованої площі. Зазначена обвідна співпадатиме з шуканим

профілем зубів нерухомого зубчатого колеса . Її форма буде узгоджена з вхідними параметрами роторно-планетарної машини.

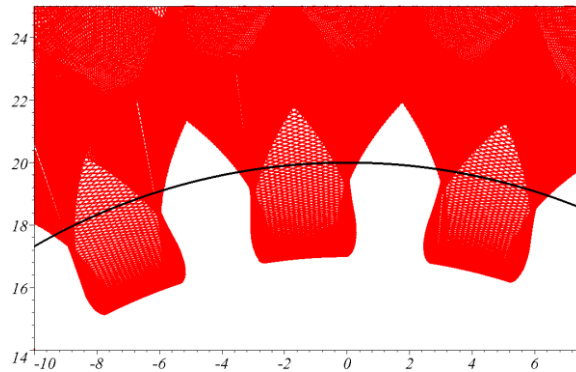


Рис. 6. Форми профілів зубів нерухомого зубчатого колеса для планетарного механізму

На рис. 6 проілюстровано наближений розв'язок у вигляді послідовності точок, належних контуру зубців пасивного колеса. Для визначення координат точок на контурі спрофільованого зубчатого колеса доцільно використати одну з основних властивостей зубчатої передачі, гідно якої точка контакту пари зубів знаходиться на дотичній до двох основних кіл коліс.

Висновки. Розроблено графоаналітичний спосіб визначення функції зміни в часі робочих об'ємів роторно-планетарної машини. Зазначену функцію визначає зміна у часі об'ємів простору, обмежених робочими профілями ротора і статора. Наближений спосіб графічної обкатки дозволяє визначити профілі зубчатих передач внутрішнього зчеплення (які входить до конструкції роторно-планетарної машини), за умови їх погодження з параметрами робочих профілів ротора і корпусу.

Література

1. Сухомлинов Р.М. Трохоидные роторные компрессоры. Харьков: ХГУ. Вища школа, 1975. 152 с.
2. Куценко Л.М., Бобов С.В., Росоха С.В. Методи геометричного моделювання в задачах пожежної безпеки. Харків: АЦЗУ, 2004. 175 с.
3. Куценко Л.М., Рева В.Г. Визначення об'ємних витрат роторно-планетарних трохойдних гідромашин. *Сборник научных трудов Киевского национального университета технологий и дизайна*. 2004. Спецвыпуск. С. 170–180.
4. Васильєв О.Б. Профільювання корпусу двигуна Ванкеля в результаті обкатки трикутником Релло. *Праці Таврійської державної агротехнічної академії*. 2003. Т. 19. Вип. 4. С. 109–113.
5. Рева В.Г. Опис взаємоспряжених кривих за допомогою функцій комплексної змінної. *Праці Таврійської державної агротехнічної*

- академії. 2004. Т. 23. Вип. 4. С. 70–74.
6. Суліма В.В. Опис криволінійних трикутників, які при синхронному обертанні забезпечують точковий дотик. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2000. Вип. 67. С. 231–233.
 7. Воронцова Д.В. Геометричний синтез роторно-планетарних машин з урахуванням їхньої динаміки. *Геометричне та комп'ютерне моделювання. Збірник наукових праць Української асоціації з прикладної геометрії «ХДУХТ»*. 2007. Вип. 20. С. 107–112.
 8. Нго Къеу Нъи, Ропота Е.П, Сухомлинов Р. М. Определение время-сечения распределительных окон трохойдных роторно-поршневых машин. *Вести Харьк.политехн. ин-та*. 1973. Вип 83. С. 5–9.
 9. Peden, M, Turner, M, Turner, JWG & Bailey, N 2018, 'Comparison of 1-D Modelling Approaches for Wankel Engine Performance Simulation and Initial Study of the Direct Injection Limitations', *SAE Technical Paper Series*, no. 2018-01-1452. p. 17.

GEOMETRIC MODELING OF WORKING PROFILES AND VOLUME OF ROTARY-PLANETARY MACHINES

Leonid Kutsenko, Irina Adashevskaya, Inessa Shelihova

A method for calculating a rotary planetary machine of the Wankel system is presented. A feature of the Wankel machine is that the movement of the rotor in relation to the body is carried out using a planetary mechanism, which is based on an internal gear.

The proposed method makes it possible to take into account the connection between the parameters of the geometric shape of two pairs of mutually conjugate curves characteristic of the Wankel machine. The first pair of curves are the working profiles of the casing and the rotor. The second pair is formed by the tooth profiles of the internal gears. Accounting for this connection made it possible to find a description of the function of the change in time of working volumes limited by the profiles of the body and rotor (i.e., to determine the productivity of the machine). As a result of the research, it was found that the performance of the Wankel machine can be found by taking into account three features of this machine. The shaping of the conjugated working profiles of the rotor and stator is carried out using a planetary mechanism, for the calculation of which the functions of complex variables are used. The performance function of the machine is determined by the change in time of the volumes of space limited by the working profiles of the rotor and housing. An approximate description of the functions of changing the working volumes of the machine with time was carried out using specially developed graphic constructions. To match the geometrical parameters of the Wankel with the parameters of the tooth profiles of the gear train of the internal clutch, a method

of graphic running has been developed. The results obtained are useful because the scheme of the considered Wankel machine is embedded in the design of the internal combustion engine of the same name, as well as in the design of various hydraulic machines, pumps, compressors, etc.

Key words: geometric modeling, rotary planetary mechanism, Wankel machine, functions of a complex variable, internal gearing.

References

1. Sukhomlinov, R.M. (1975). Trochoid rotary compressors. Kharkov: KHGU Vishcha shkola. 152. [in Russian]
2. Kutsenko, L.M., Bobov, S.V., Rosokha S.V. (2004). Methods of geometric modeling in fire safety problems. Navchalniy posibnik. Kharkov: ATSZU. 175. [in Ukrainian]
3. Kutsenko, L.M., Reva, V.G. (2004). Determination of volumetric flow rates of rotary-planetary trochoidal hydraulic machines. *Sbornik nauchnykh trudov Kiyevskogo natsionalnogo universiteta tekhnologiy i dizayna*. Spetsvypusk. K.: Vipol, 170–180. [in Ukrainian]
4. Vasilev, O.B. (2003). Profiling of the Wankel engine body as a result of running-in with the Rello triangle. Pratsi Tavriyskoi derzhavnoi agrotekhnichnoi akademii. Melitopol: TDATA, 4(19). 109–113. [in Ukrainian]
5. Reva, V.G. (2004). Description of conjugate curves using functions of a complex variable. Pratsi Tavriyskoi derzhavnoi agrotekhnichnoi akademii. Melitopol: TDATA, 4(23). 70–74. [in Ukrainian]
6. Sulima, V.V. (2000). Description of curvilinear triangles that provide point contact during synchronous rotation. *Prikladna geometriya ta inzhenerna grafika*. Kiyv: KNUBA, 67. 231–233. [in Ukrainian]
7. Vorontsova, D.V. (2007). Geometric synthesis of rotary-planetary machines taking into account their dynamics. *Geometriche ta komp'yuterne modelyuvannya*. Zbirnik naukovikh prats' Ukraïns'koï asotsiatsii z prikladnoi geometrii «KHUKHT». Kharkiv, 20. 107–112. [in Russian]
8. Ngo, K'yeu N'i, Ropota, Ye.P, Sukhomlinov, R. M. (1973). Determination of the time-section of distribution windows of trochoid rotary-piston machines. *Vesti. Kharik.politekhn, in-ta. Ser. Khimicheskoye mashinostroyeniye*, 83. 5–9. [in Russian]
9. Peden, M, Turner, M, Turner, JWG & Bailey, N 2018, 'Comparison of 1-D Modelling Approaches for Wankel Engine Performance Simulation and Initial Study of the Direct Injection Limitations', *SAE Technical Paper Series*, no. 2018-01-1452. p. 17.