

УДК 519.6

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ: ОСНОВНІ ЕТАПИ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ МОДЕЛЕЙ

Муртазієв Е.Г., к.пед.н.,

ernest_gaf@ukr.net, ORCID: 0000-0002-2154-5523

Сюсюкан Ю.М.

syusyukan@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5539-2449

Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (Україна)

Сучасний світ потребує освічених людей з високим рівнем математичної компетентності та культури. Особливу роль у цьому без сумніву відіграють різноманітні моделі, які дають можливість не тільки дослідити, зрозуміти те чи інше явище, а й розвинути вміння аналізувати, створювати нове, абстрактно мислити, що є необхідною основою для подальшого становлення та розвитку людини як особистості. Оскільки моделі використовуються у різних сферах людської діяльності і для різних цілей, то існує кілька основ для класифікації моделей.

Найважливішим видом знакових моделей є математичні моделі. Математична модель — це абстракція реальних процесів в механічній інженерії, в якій відношення між реальними елементами, а саме тими, що цікавлять дослідника, замінені відношеннями між математичними категоріями. Ці відношення зазвичай подаються у формі рівнянь чи нерівностей, відношеннями формальної логіки між показниками (змінними), які характеризують функціонування реальної системи, що моделюється. Математична модель розглядається в науковому просторі, як наближений опис довільного класу явищ зовнішнього світу, поданий за допомогою математичної символіки. Математичне моделювання виступає як метод пізнання зовнішнього світу, а також прогнозування і управління. Аналіз математичних моделей дозволяє проникнути в сутність досліджуваних явищ. Як відомо, математика як предмет і як наука дає чи не найбільший вклад у розвиток абстрактного мислення людини, а математична модель виступає містком між теоретичною, абстрактною мовою науки та реальним явищем навколишнього світу.

У своїй діяльності людині часто доводиться мати справу з моделюванням, а особливо з математичним: складання рівнянь, систем рівнянь, нерівностей, запису функцій тощо. В даній статті розглядається поняття моделі, математичного моделювання та наведені основні етапи та класифікація моделей.

Ключові слова: модель, математичне моделювання, класифікація моделей, математична компетентність.

Постановка проблеми. Практично все своє життя людина має справу з моделями – чи то модель автомобіля у вигляді дитячої іграшки, чи модель Земної кулі у вигляді глобуса. Під час навчання у школі, починаючи з наймолодшого віку, діти починають вивчати, пізнавати, досліджувати навколишній світ. Особливу роль у цьому без сумніву відіграють різноманітні моделі, які дають можливість не тільки дослідити, зрозуміти те чи інше явище, а й розвинути вміння аналізувати, створювати нове, абстрактно мислити, що є необхідною основою для подальшого становлення та розвитку людини як особистості. Модель є одним із центральних і складних понять теорії пізнання, оскільки воно опирається на філософські поняття: відображення, істина, подібність, відмінність, правдоподібність, аналогія тощо. Поняття моделі відіграє в методології будь-якої науки значну роль. У дослідженнях Ю.А. Коварського, Ю.А. Кусого, В.Ф. Паламарчук, В.В. Попковича, Н.М. Розенберга, М.А. Солодухіна, І.І. Блехмана, А.Д. Мишкіса, Я.Г. Пановка та інших визначена специфіка моделювання як теоретичного методу та прийому навчання, розкриті функції, роль і місце моделювання у навчальному процесі. Фундаторами сучасної методології математичного моделювання були В.М. Глушков, Б.В. Гнеденко, А.М. Колмогоров, О.А. Самарський, А.М. Тихонов, А.Ф. Турбін, В.С. Королюк, В.М. Остапенко та інші. [10]

Аналіз останніх досліджень. За наявними даними [9] сам термін “модель” вперше 275 трапляється у роботах математиків кінця XIX ст. Еудженіо Бельтрамі (італ. Eugenio Beltrami) та Фелікса Кляйна (нім. Felix Christian Klein) у геометрії. Дещо пізніше цей термін застосували у своїх роботах логіки, філософи і математики Голоб Фреге (нім. Friedrich Ludwig Gottlob Frege) та Бертран Рассел (анг. Bertrand Arthur William Russell). У лінгвістиці цей термін (1944 р.) вживав американський мовознавець Зелліг Герріс (анг. Zellig Sabbetai Harris) для опису специфіки методології Едварда Сепіра (анг. Edward Sapir).

Аналіз літератури ([4], [5], [6]) показав, що немає чіткої і повної класифікації математичних моделей. Найпоширенішою є така [4]:

1) За приналежністю до ієрархічного рівня: математичні моделі мікрорівня, макрорівня та метарівня.

2) За характером властивостей об'єкта, що відображаються: математичні моделі структурні та функціональні.

3) За способом представлення властивостей об'єкта: математичні моделі, аналітичні, алгоритмічні, імітаційні.

4) За способом отримання моделі: математичні моделі теоретичні, експериментально-аналітичні, емпіричні.

5) За особливостями поведінки об'єкта: математичні моделі детерміновані та імовірнісні.

6) За підходом до опису властивостей об'єкта: математичні моделі з зосередженими параметрами та моделі з розподіленими параметрами.

7) За характером урахування характеристик системи: лінійні математичні моделі та нелінійні математичні моделі.

8) За особливістю зміни параметрів моделі в часі: стаціонарні та нестаціонарні математичні моделі.

9) За множиною значень змінних: неперервні математичні моделі та дискретні математичні моделі.

Формулювання цілей статті. Проаналізувати різні підходи до поняття моделі, з'ясувати основні етапи та властивості математичних моделей.

Основна частина. Проблематики моделювання в наукових дослідженнях стосується чимало праць українських та зарубіжних авторів, здебільшого моделювання у конкретних галузях науки. Загальнофілософські проблеми моделювання висвітлює робота Віктора Петрушенка [8].

Модель – це допоміжний об'єкт, який знаходиться у певній відповідності до об'єкта, що вивчається (оригіналу), і є більш зручним для дослідження оригіналу. Відображаючи окремі особливості поведінки об'єкта-оригіналу, модель має деякі риси, ідентичні з оригіналом, і використовується для одержання такої інформації про оригінал, яку важко або неможливо одержати шляхом безпосереднього дослідження оригіналу.

Математична модель розглядається в науковому просторі, як наближений опис довільного класу явищ зовнішнього світу, поданий за допомогою математичної символіки. Математичне моделювання виступає як метод пізнання зовнішнього світу, а також прогнозування і управління. Аналіз математичних моделей дозволяє проникнути в сутність досліджуваних явищ.

Усі математичні моделі з використаної формальної мови можна розбити на аналітичні та імітаційні. Аналітичні – моделі, в яких використовується стандартна математична мова. Імітаційні – моделі, в яких використана спеціальна мова моделювання або універсальна мова програмування. Аналітичні моделі можуть бути записані у вигляді формул чи рівнянь. Якщо будь-який процес може бути описаний як аналітичної моделі, його описують з допомогою спеціального алгоритму чи програми. Така модель є імітаційною.

Аналітичні моделі, у свою чергу, розбиваються на теоретичні та емпіричні моделі. Теоретичні моделі відображають реальні структури та процеси в досліджуваних об'єктах, тобто, спираються на теорію їхньої роботи. Емпіричні моделі будуються з урахуванням вивчення реакцій об'єкта зміну умов довкілля. За формою опису аналітичні моделі поділяються на лінійні та нелінійні. Якщо всі входять у модель величини залежать від часу, маємо статичну модель об'єкта чи процесу, інакше отримуємо динамічну модель.

У детермінованих моделях всі взаємозв'язки, змінні та константи задані точно, що призводить до однозначного визначення результуючої функції.

Якщо частина або всі параметри, що входять у модель за своєю природою, є випадковими величинами або випадковими функціями, то модель відносять до класу стохастичних моделей. Якщо аналітичне дослідження можна довести до кінця, моделі називаються аналітично розв'язними. Інакше говорять про численно розв'язувані аналітичні моделі.

Основні етапи математичного моделювання:

- побудова моделі. На цьому етапі визначається деякий «нематематичний» об'єкт — явище природи, конструкція, економічний план, виробничий процес. При цьому, як правило, чіткий опис ситуації утруднений. Спочатку виявляються основні особливості явища та зв'язку між ними на якісному рівні. Потім знайдені якісні залежності формулюються мовою математики, тобто будується математична модель;

- розв'язання математичної задачі, до якої призводить модель;

- інтерпретація отриманих наслідків з математичної моделі;

- перевірка адекватності моделі. На цьому етапі з'ясовується, чи узгоджуються результати експерименту з теоретичними наслідками з моделі в межах певної точності;

- модифікація моделі. На цьому етапі відбувається або ускладнення моделі, щоб вона була більш адекватною дійсності, або її спрощення задля досягнення практично прийнятного рішення. Для створення математичних моделей можна використовувати будь-які математичні засоби — мову диференціальних або інтегральних рівнянь, теорії множин, абстрактної алгебри, математичну логіку, теорії ймовірностей, графи та інші.

Процес створення математичної моделі називається *математичним моделюванням*. Це найзагальніший та найбільш використовуваний в науці, зокрема, в кіберетиці, метод досліджень. Якщо відношення задаються аналітично, то їх можна розв'язати в замкнутому вигляді (явно) відносно шуканих змінних як функції від параметрів моделі, або в частково замкнутому вигляді (неявно), коли шукані змінні залежать від одного або багатьох параметрів моделі. До моделей цього класу належать диференціальні, інтегральні, різницеві рівняння, ймовірнісні моделі, моделі математичного програмування та інші. Якщо не можна здобути точний розв'язок математичної моделі, використовуються чисельні (обчислювальні) методи або інші види моделювання. У залежності від того, якими є параметри системи та зовнішні збурення математичної моделі можуть бути детермінованими та стохастичними. Останні мають особливо важливе значення при дослідженні і проектуванні великих систем зі складними зв'язками і властивостями, які важко врахувати. Математичний опис неперервного процесу (наприклад, диференціальними рівняннями) являє собою неперервну математичну модель.

Висновки. Отже, поняття моделі розглядається у багатьох науках. Найважливішою із знакових моделей є математична модель. Математичне моделювання застосовується для дослідження об'єктів різної природи. Таким чином, застосування математичних моделей в різних науках являє

собою реалізацію методологічної сутності математичних знань і самої математики. Майбутній вчитель математики повинен вміти практично застосовувати математичні моделі для вирішення різних конструкторських і управлінських завдань і мати навички роботи з комп'ютером як засобом обробки даних.

Література

1. Балюба І.Г., Найдьш В.М. Точечное исчисление [учебное пособие], под ред. Верещаги В.М. Мелітополь: Изд-во МГПУ ім. Б.Хмельницького, 2015. 234 с.
2. Борисов Є.М. Задачі прикладного змісту на уроках геометрії / Є.М. Борисов, Н. В. Кугай. *Математика в рідній школі*. 2014. № 7-8. С.17-21.
3. Верещага В.М., Лисенко К.Ю. Спосіб визначення опуклості ДПК. *Сучасні проблеми моделювання. Технічні науки*. Мелітополь, 2017. Вип.8. С. 44-48.
4. Кветний Р.Н. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 1: навчальний посібник / За заг. ред. Р.Н. Кветного. Вінниця : ВНТУ, 2013. – 191 с.
5. Кугай Н.В., Сухойваненко Л.Ф. Методологічні знання та міжпредметні зв'язки. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, II(16), Issue: 33, 2014. С. 49-52.
6. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ [монографія]. Х. : Факт, 2005. 360 с.
7. Верещага В.М. Композиційне геометричне моделювання: Монографія. Мелітополь: ФОП Однорог Т.В., 2017, 108 с.
8. Петрушенко Віктор. Філософія (вступ до курсу, історія світової та української філософії, фундаментальні проблеми сучасної філософії): навч. посіб. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2014. 596 с
9. Концептуалізація понять “модель” та “моделювання” у наукових дослідженнях. Електроний ресурс: Режим доступу: <https://science.lpnu.ua/sites/default/files/journalpaper/2018/jun/12897/19kulchickiyimkonceptual.pdf>
10. Кугай Н.В., Борисов Є.М. Методологічні аспекти математичного моделювання. Електроний ресурс: Режим доступу: <http://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/14947/%20uhai.pdf?sequence=1>.

MATHEMATICAL MODELING: MAIN STAGES AND CLASSIFICATION OF MODELS

Ernest Murtaziiev, Yuri Syusyukan

The modern world needs educated people with a high level of mathematical competence and culture. A special role in this is undoubtedly played by various models, which provide an opportunity not only to investigate and understand this or that phenomenon, but also to develop the ability to analyze, create new things, think abstractly, which is a necessary basis for the further formation and development of a person as an individual. Since models are used in different areas of human activity and for different purposes, there are several bases for classifying models.

The most important type of symbolic models are mathematical models. A mathematical model is an abstraction of real processes in mechanical engineering, in which relationships between real elements, namely those of interest to the researcher, are replaced by relationships between mathematical categories. These relations are usually presented in the form of equations or inequalities, relations of formal logic between indicators (variables) that characterize the functioning of the real system being modeled. A mathematical model is considered in the scientific space as an approximate description of an arbitrary class of phenomena of the external world, presented using mathematical symbols. Mathematical modeling acts as a method of learning about the external world, as well as forecasting and management. Analysis of mathematical models allows to penetrate into the essence of the studied phenomena. As you know, mathematics as a subject and as a science makes almost the greatest contribution to the development of abstract human thinking, and the mathematical model acts as a bridge between the theoretical, abstract language of science and the real phenomenon of the surrounding world

In his activity, a person often has to deal with modeling, and especially with mathematical modeling: compiling equations, systems of equations, inequalities, recording functions, etc. This article examines the concept of model, mathematical modeling and presents the main stages and classification of models.

Keywords: model, mathematical modeling, classification of models, mathematical competence.

References

1. Balyuba I.G., Naidysh V.M. Point calculation [teaching manual], under the editorship. Vereshchagy V.M. Melitopol: Publishing House of the Moscow State University named after B. Khmelnytskyi, 2015. 234 p. [in Russian]
2. Borysov E.M., Kugai N. V. Problems of applied content in geometry lessons. *Mathematics in the native school*. 2014. No. 7-8. P.17-21. [in Ukrainian]
3. Vereshchaga V.M., Lysenko K.Yu. The method of determining the bulge of the DPC. *Modern modeling problems*. Technical sciences. Melitopol, 2017. Issue 8. P. 44-48. [in Ukrainian]
4. Kvyetny R.N. Computer modeling of systems and processes. Calculation methods. Part 1: study guide / In general. ed. R.N. Floral Vinnytsia: VNTU, 2013. 191 p. [in Ukrainian]
5. Kugai N.V. Methodological knowledge and interdisciplinary connections / N.V. Kugai, L.F. Sukhoivanenko // *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*, II(16), Issue: 33, 2014. P. 49-52. [in Ukrainian]
6. Rakov S.A. Mathematical education: competence approach using ICT [monograph] / S.A. Rakov. X.: Fakt, 2005. 360 p. [in Ukrainian]
7. Vereshchaga V.M. Composite geometric modeling: Monograph. Melitopol: FOP Odnorog T.V., 2017, 108 p. [in Ukrainian]
8. Viktor Petrusenko. Philosophy (introduction to the course, history of world and Ukrainian philosophy, fundamental problems of modern philosophy): teaching. Manual. Lviv: Publishing House of Lviv Polytechnic, 2014. 596 p. [in Ukrainian]
9. Conceptualization of the concepts of "model" and "modeling" in scientific research. Electronic resource: Access mode: <https://science.lpnu.ua/sites/default/files/journalpaper/2018/jun/12897/19kulchickiyimkonceptual.pdf>. [in Ukrainian]
10. Kugai N.V., Borisov E.M. Methodological aspects of mathematical modeling. Electronic resource: Access mode: <http://enpuir.npu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/14947/%20uhai.pdf?sequence=1>. [in Ukrainian]