

УДК 514.8

РОЗВ'ЯЗАННЯ ПОЗИЦІЙНИХ ЗАДАЧ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ МОНОТОННИХ КРИВИХ ЛІНІЙ

Холодняк Ю.В., к.т.н.,

yuliya.kholodnyak@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0001-8966-9269

Гавриленко Є.А., д.т.н.

yevhen.havrylenko@tsatu.edu.ua, ORCID: 0000-0003-4501-445X

Таврійський державний агротехнологічний університет імені Дмитра
Моторного (Україна)

В роботі розглядається розвиток методу варіативного дискретного геометричного моделювання кривих ліній з монотонною зміною кривини. Дискретно представлена крива (ДПК), що моделюється, представлена упорядкованою множиною точок, які їй належать, і диференціально-геометричними характеристиками кривої. Ці характеристики необхідно забезпечити в процесі моделювання. Крива формується згущенням, що передбачає визначення вихідного точкового ряду проміжних точок. При цьому вважаємо, що вихідні точки задані без похибки та у процесі моделювання не змінюють свого положення. Розв'язано задачу взаємного розташування ДПК та довільної прямої лінії: визначення точки перетину або торкання кривої з прямою лінією. Розв'язання задач, які розглядаються в роботі, передбачає визначення області можливого розв'язку виходячи з умов, що накладаються на криву: відсутність осциляції, заданий порядок гладкості, динаміка зміни положень дотичних і значень радіусів кривини вздовж кривих і т.п. В процесі моделювання область можливого розв'язку уточнюється.

Запропоновані алгоритми можуть бути використані для формування поверхонь за заданими диференціально-геометричними умовами на основі каркасу, лінійними елементами якого є плоскі ДПК. Алгоритми дозволяють узгоджувати характеристики кривих, що задають сітчастий дискретний каркас поверхні. Це дає можливість забезпечувати в процесі послідовних згущень перетин кривих ліній, що належать різним сімействам ліній, та керувати динамікою зміни положень, що дотичні до поверхні. Моделювання поверхні передбачає згущення ДПК, які є елементами каркасу поверхні, і збільшення цих елементів – згущення лінійчатого каркасу. Елементами моделі є лінії, сформовані на основі вихідних вузлів (вихідні ДПК) та лінії, сформовані на основі вихідного точкового ряду, що складається з точок згущення вихідних ДПК (ДПК згущення). Поверхню вважатимемо визначеною у разі, якщо всі ДПК, що складають каркас поверхні, сформовані з похибкою, що не перевищує задану величину.

Ключові слова: дискретно представлена крива, область

розташування кривої, другий порядок гладкості, монотонність зміни кривизни.

Постановка проблеми. Проектування виробів, які взаємодіють із середовищем (канали двигунів внутрішнього згорання, робочі органи сільськогосподарських машин, крило літака тощо) передбачає моделювання складних поверхонь з підвищеними динамічними якостями [1-4]. Такі поверхні можуть бути сформовані на основі дискретного лінійчатого каркасу. Диференціально-геометричні характеристики поверхні визначаються характеристиками кривих ліній, що є лінійними елементами каркасу [5-6]. При формуванні поверхонь за заданими умовами такими характеристиками можуть бути: відсутність осциляції, заданий порядок гладкості, динаміка зміни положень дотичних і значень радіусів кривини вздовж кривих і т.д. [7-8]. Якщо поверхня задана сітчастим каркасом, виникає необхідність узгодження характеристик кривих, що належать різним сімействам.

При використанні в якості елементів каркасу дискретно представлених кривих (ДПК) є природним використання відповідних методів дискретного геометричного моделювання, а саме варіативного дискретного геометричного моделювання (ВДГМ). У цьому випадку узгодження характеристик кривих, що належать різним сімействам, вирішуватиметься у рамках відповідного методу ВДГМ (у нашому випадку це метод базисних трикутників) у термінах та засобах цього методу, виходячи з алгоритму методу.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. ВДГМ передбачає формування обводу як скільки завгодно великої кількості точок, одержуваних у результаті послідовних згущень вихідного точкового ряду [9]. Положення точок геометричного образу призначаються всередині діапазонів можливого розташування, що визначаються з умов завдання.

У роботах [10-11] запропоновано спосіб визначення положень до ДПК у вихідних точках і точках, які одержуються в результаті згущення. Положення дотичних призначаються всередині діапазонів, що забезпечують виконання умов, які накладаються на криву: відсутність осциляції, другий порядок гладкості, монотонна зміна радіусів кривини. Цей спосіб не передбачає визначення положення прямої, яка дотична до ДПК у довільній точці.

Для розширення переліку задач, при розв'язанні яких може застосовуватися метод базисних трикутників, необхідно розв'язати задачі взаємного розташування ДПК та прямої лінії.

Метою статті є розробка алгоритмів, що дозволяють розв'язувати наступні позиційні задачі: визначення точки перетину ДПК із прямою лінією; визначення дотичної до ДПК у довільній точці.

Основна частина. Нехай ДПК задана у вихідній декартовій системі координат координатами точок, що їй належать. Визначимо точку

перетину ДПК з довільною прямою l . Для розв'язання поставленої задачі визначаються точки перетину прямої l з межами області можливого розташування кривої, що визначається виходячи з умов, що накладаються на криву (відсутність осциляції, другий порядок гладкості, монотонна зміна радіусів кривини вздовж кривої). Відрізок прямої, обмежений отриманими точками, визначає діапазон можливого розташування точки, яку необхідно знайти (точки Q). У процесі послідовних згущень цей діапазон зменшується. Якщо величина діапазону менша за задане значення, то положення точки Q призначається по центру діапазону.

Ділянка, на якій ДПК перетинається з прямою l , визначається хордою вихідної супроводжуючої ламаної лінії (СЛЛ), яку перетинає ця пряма. Розглянемо ділянку ДПК $i \dots i+1$. Якщо точка перетину прямої та прямої, що з'єднує точки ділянки (точка L) належить відрізку $[i; i+1]$, то l перетинає хорду СЛЛ $[i; i+1]$ (рис. 1).

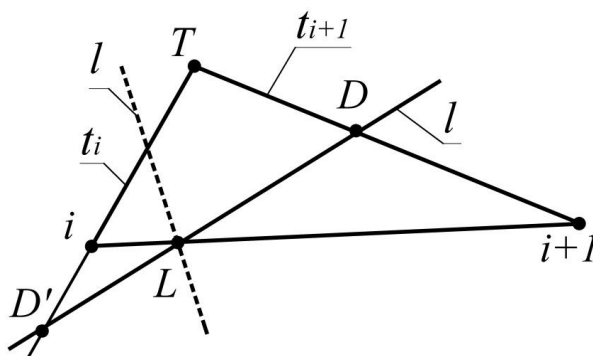


Рис. 1. Визначення діапазону розташування точки перетину ДПК з прямою лінією

Координати точки визначаються в результаті розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} (y - y_i)(x_{i+1} - x_i) = (x - x_i)(y_{i+1} - y_i), \\ y = kx + b. \end{cases}$$

Точка L належить відрізку $[i; i+1]$ у випадку, якщо виконується умова

$$|i; L| + |L; i+1| = |i; i+1|.$$

Нехай пряма l перетинає хорду $[i; i+1]$. Так як на криву накладається умова відсутності осциляції, то крива, що формується, на ділянці $i \dots i+1$, розташовується всередині базисного трикутника (БТ) $(i; T; i+1)$ [10]. Базисний трикутник обмежений дотичними, що проходять через сусідні точки ДПК (t_i і t_{i+1}) і хордою $[i; i+1]$, що з'єднує ці точки. Точка Q розташована всередині відрізка, обмеженого точками перетину прямої l зі сторонами БТ (D).

В залежності від вихідних даних пряма l може перетинати сторону БТ $|i;T|$ або $|T;i+1|$. Приналежність точки відрізку $|i;T|$ або $|T;i+1|$ визначається аналогічно до визначення положення точки L .

Нехай пряма l перетинає сторону БТ $|T;i+1|$ у точці D . Відрізок $[L;D]$ є діапазоном можливого розташування точки перетину прямої ДПК. Якщо величина відрізка $[L;D]$ перевищує задану точність визначення точки Q , діапазон уточнюється виходячи з умови монотонного зміни радіусів кривини вздовж ДПК.

Уточнений діапазон розташування точки Q обмежений точками перетину прямої з верхньою та нижньою межами області розташування ДПК (E і F). Область розташування кривої з монотонною зміною кривини, обмежена коробовими лініями кіл (рис. 2):

- нижня границя складається з дуги $i-A$ стичного кола в точці i (CO_i) та дуги $A-i+1$ кола, яке дотичне до t_i в точці $i+1$ та до CO_i ;
- верхня межа складається з дуги $B-i+1$ стичного кола в точці $i+1$ (CO_{i+1}) і дуги кола, яке дотичне до t_i в точці i та до CO_{i+1} .

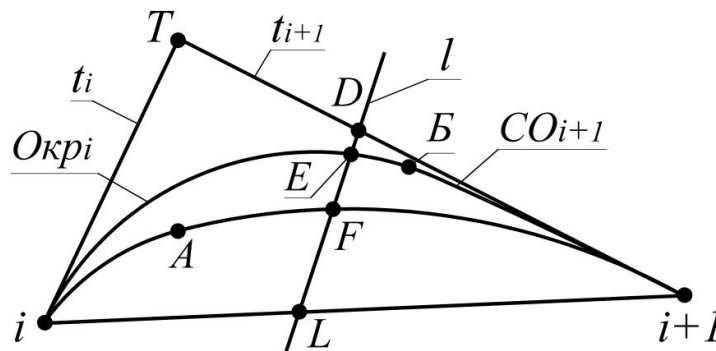


Рис. 2. Схема визначення положення точки перетину ДПК з прямою лінією

Розглянемо схему визначення положення точки, отриманої в результаті перетину прямої та верхньої межі області розташування ДПК. Пряма l може перетинати дугу CO_{i+1} та дугу $Okri$. Якщо точка торкання CO_{i+1} та $Okri$ (B) розташована всередині трикутника $(L;D;i+1)$, то l перетинає дугу $Okri$, інакше l перетинає дугу CO_{i+1} .

Взаємне розташування точки B та прямої l визначається виходячи з барицентричних координат точки B у трикутнику $(L;D;i+1)$. У випадку, якщо барицентричні координати відносно вершин L , D та $i+1$ більше нуля, то точка розташована всередині цього трикутника.

Координати точки E визначаються в результаті розв'язання системи, що складається з двох рівнянь

- рівняння кола CO_{i+1} або $Okri$;

- рівняння прямої $l: y=kx+b$.

Положення точки F , отриманої в результаті перетину прямої l з нижньою границею області можливого розташування ДПК, визначається аналогічно.

Величина діапазону розташування точки перетину прямої l та ДПК визначається довжиною відрізка $[E;F]$. У процесі послідовних згущень діапазон $[E;F]$ зменшується. При досягненні діапазону, величина якого менша за задану точність розв'язання задачі, точка Q призначається по його центру.

Розглянемо задачу визначення положення прямої, що дотична до ДПК в довільній точці. Можливі такі варіанти постановки задачі:

- дотична проходить через задану точку, що не належить ДПК;
- дотична до ДПК паралельна заданій прямій.

Якщо крива не має точки перегину, то через точку, яка їй не належить, можна провести дві дотичні до цієї кривої (рис. 3).

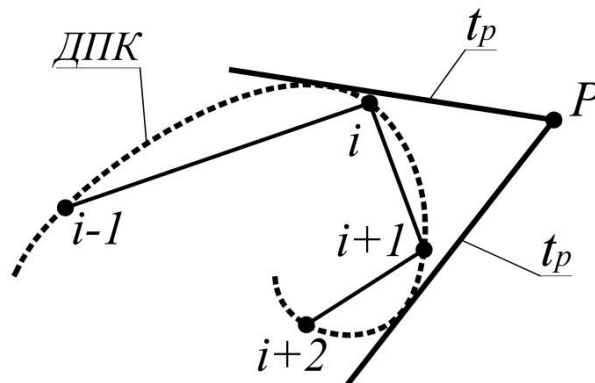


Рис. 3. Розташування прямої, дотичної до ДПК

Як попереднє положення дотичної до ДПК (t_p), яка проходить через задану точку $P(x_p; y_p)$, призначається пряма, яка визначається точкою P і точкою вихідного ряду таким чином, що всі інші точки ДПК розташовуються по одну сторону від призначеного положення t_p (рис. 4, а).

Для визначення попереднього положення t_p пропонується наступна схема:

- призначається локальна система координат, початок якої збігається з точкою P , а вісь абсцис Px' спрямована перпендикулярно одній з ланок вихідної СЛЛ, наприклад $[i; i+1]$;

- у зазначеній системі координат попереднє положення t_p – це пряма, що проходить через точку P та вихідні точки ДПК таким чином, щоб кути між призначеними положеннями t_p і віссю Px' були максимальними.

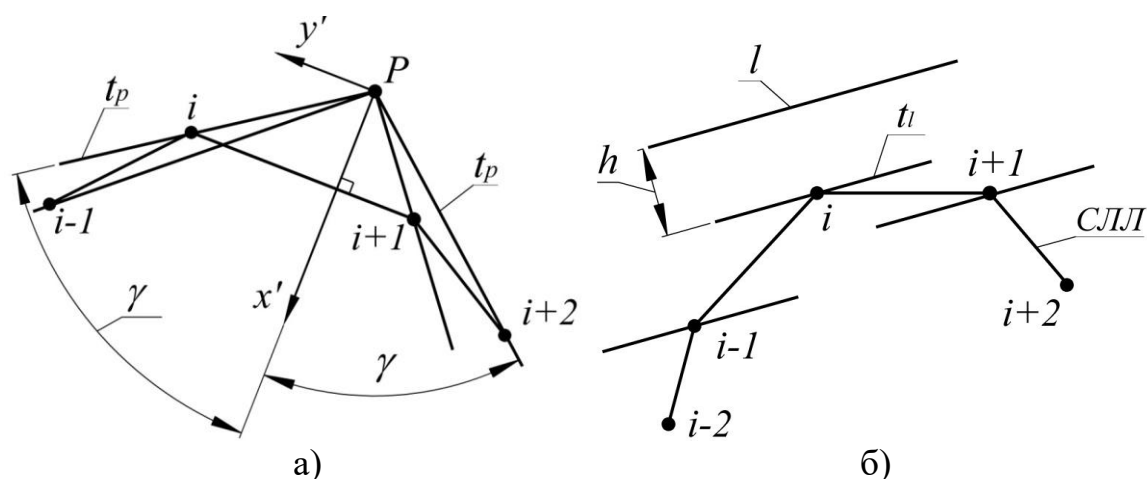


Рис. 4. Схема визначення положення прямої, дотичної до ДПК

Якщо пряма l не перетинає ДПК, то попереднє положення стосовно ДПК (t_l) - пряма, яка паралельна l і проходить через найближче розташовану до неї вихідну точку ДПК, в іншому випадку - найбільш віддалену точку від прямої l .

У процесі послідовних згущень положення дотичної до ДПК уточнюється виходячи з положень точок згущення, призначених на попередній та наступній ділянці ДПК щодо попередньої точки торкання (i).

Похибка, з якою призначене положення t_p представляє дотичну до ДПК (δ_p), оцінюється величиною кута між t_p і прямою, що проходить через точку P і дотичну з верхньою межею області можливого розташування ДПК на ділянці $i \dots i+1$ (на рис. 1 це коробова лінія $i - B - i+1$).

Аналогічно, похибка, з якою призначена пряма t_l представляє дотичну до ДПК (δ_l), оцінюється відстанню між t_l і прямою, паралельною l і дотичною до верхньої границі області розташування ДПК на ділянці.

Положення дотичної до ДПК вважаємо визначеним остаточно у випадку, якщо величина δ_p або δ_l не перевищує заданої величини.

Висновки. В результаті досліджень розв'язано наступні позиційні задачі:

- визначення точки перетину ДПК з прямою лінією;
- визначення положення прямої довільного напрямку, яка дотична до ДПК.

Область можливого розв'язку визначається в процесі послідовних згущень виходячи з наступних умов, що накладаються на ДПК: відсутність осциляції, другий порядок гладкості та монотонна зміна радіусів кривини вздовж кривої.

Запропоновані алгоритми дозволяють узгоджувати характеристики кривих, що задають сітчастий дискретний каркас поверхні. Це дає можливість забезпечувати в процесі послідовних згущень перетин ДПК, які належать різним сімействам ліній, і керувати динамікою зміни

положень дотичних до уздовж поверхні.

Перспективою подальших досліджень є розробка алгоритмів, які дозволяють розв'язувати прикладні задачі: формування ДПК заданої довжини, формування еквідистантної кривої.

Література

1. Zhou Y., Schulze J., Schaffler S. Flank millable blade design for centrifugal compressors. *Control and Automation*. Thessaloniki, 2009. P. 646 - 650. DOI: 10.1109/MED.2009.5164616.
2. Wen A.S., Shamsuddin S.M., Samian Y. Ship hull fitting using NURBS. *Computer Graphics, Imaging and Vision: New Trends*. Washington, Brussels, Tokyo, 2005. P. 431 - 436. DOI: 10.1109/CGIV.2005.66
3. Hongli W., Wei Z. Modeling of no-tillage planter i simulation of cutting-stubble knife. *System Science, Engineering Design and Manufacturing Informatization*. Chengdu, 2012. P. 335 - 338. DOI: 10.1109/ICSSEM.2012.6340880.
4. Kholodniak Yu., Havrylenko Ye., Pykhtieieva I., Shcherbyna V. Design of Functional Surfaces in CAD System of SolidWorks via Specialized Software. *Modern Development Paths of Agricultural Production*. Cham. 2019. P. 63-74. DOI: 10.1007/978-3-030-14918-5_7.
5. Ampofo J., Ferguson F. Optimal design of aircraft wing structures: computer aided design method. *Robotics, automation, control and manufacturing: trends, principles and applications*. Greensboro, 2002. Vol. 14. P. 471 - 480. DOI: 10.1109/WAC.2002.1049483.
6. Havrylenko Y., Cortez J.I., Kholodniak Y., Aliksieieva H., Garcia G.T. Modelling of surfaces of engineering products on the basis of array of points. *Tehnicki Vjesnik*. 2020. Vol. 27(6). P. 2034–2043. DOI: 10.17559/tv-20190720081227.
7. Осипов В.А. Машинные методы проектирования непрерывно–каркасных поверхностей. М.: Машиностроение, 1979. 248 с.
8. Havrylenko Ye., Kholodniak Yu., Halko S., Vershkov O., Miroshnyk O., Suprun O., Dereza O., Shchur T. and Šrutek M. Representation of a Monotone Curve by a Contour with Regular Change in Curvature. *Entropy* (Basel). 2021. Vol. 23 (7):923. DOI: 10.3390/e23070923.
9. Gavrilenko E. A., Kholodnyak Y. V. Discretely geometrical modelling of one-dimensional contours with a regular change of differential-geometric characteristics. *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)*. 2014. P. 1-5. DOI: 10.1109/Dynamics.2014.7005654.
10. Гавриленко Е.А., Холодняк Ю.В., Ивженко А.В., Найдыш А.В. Назначение характеристик в точках обвода с монотонным изменением кривизны. *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь: МДПУ, 2020. Вып.16. С. 91-97.
11. Havrylenko Ye., Kholodniak Yu., Halko S., Vershkov O., Bondarenko L., Suprun O., Miroshnyk O., Shchur T., Šrutek M., Gackowska M.

Interpolation with Specified Error of a Point Series Belonging to a Monotone Curve. *Entropy* (Basel). 2021. Vol. 23(5):493. DOI: 10.3390/e23050493.

SOLUTION OF POSITIONAL PROBLEMS AT MODELING OF MONOTONOUS CURVES

Yuliia Kholodniak, Yevhen Havrylenko

The paper considers the development of the method of variable discrete geometric modeling of curved lines with a monotonous change in curvature. The discretely represented curve (DRC) being modeled is represented by an ordered set of points that belong to them and the differential geometric characteristics of the curve. These characteristics must be ensured during the modeling process. The curve is formed by thickening, which involves determining the initial point series of intermediate points. At the same time, we believe that the starting points are set without error and do not change their position during the modeling process. The problem of the mutual location of the DRC and an arbitrary straight line has been solved: determining the point of intersection or contact of a curve with a straight line. The solution of the problems considered in the work involves determining the area of a possible solution based on the conditions imposed on the curve: the absence of oscillation, the given order of smoothness, the dynamics of changes in the tangent positions and the values of the radii of curvature along the curves, etc. In the process of modeling, the area of a possible solution is refined.

The proposed algorithms can be used to form surfaces according to the given differential-geometric conditions on the basis of the framework, the linear elements of which are flat DRCs. Algorithms allow you to match the characteristics of the curves that define the mesh discrete frame of the surface. This makes it possible to ensure the intersection of curved lines belonging to different families of lines in the process of successive thickenings, and to control the dynamics of changes in positions tangent to the surface. Modeling the surface involves the thickening of the DRC, which are the elements of the surface frame, and the increase of these elements - the thickening of the linear frame. The elements of the model are the lines formed on the basis of the original nodes (output DRCs) and the lines formed on the basis of the original point series consisting of points of condensation of the original DRCs (condensation DRCs). The surface will be considered defined if all the DRCs that make up the frame of the surface are formed with an error that does not exceed the specified value.

Key words: discretely represented curve, region of curve location, second order of smoothness, monotonicity of curvature change.

Referenses

1. Zhou, Y., Schulze, J., & Schaffler, S. (2009). Flank millable blade design for centrifugal compressors. *Control and Automation*, 646 - 650. DOI: 10.1109/MED.2009.5164616 [in English]
2. Wen, A.S., Shamsuddin, S.M., & Samian, Y. (2005). Ship hull fitting using NURBS. *Computer Graphics, Imaging and Vision: New Trends*. Washington, Brussels, Tokyo, 431 - 436. DOI: 10.1109/CGIV.2005.66 [in English]
3. Hongli, W., & Wei, Z. (2012). Modeling of no-tillage planter i simulation of cutting-stubble knife. *System Science, Engineering Design and Manufacturing Informatization*, 335 - 338. DOI: 10.1109/ICSSEM.2012.6340880 [in English]
4. Kholodniak, Yu., Havrylenko, Ye., Pykhtieieva, I., & Shcherbyna, V. (2019). Design of Functional Surfaces in CAD System of SolidWorks via Specialized Software. *Modern Development Paths of Agricultural Production*, 63-74. DOI: 10.1007/978-3-030-14918-5_7 [in English]
5. Ampofo, J., & Ferguson, F. (2002). Optimal design of aircraft wing structures: computer aided design method. *Robotics, automation, control and manufacturing: trends, principles and applications*, 14, 471 - 480. DOI: 10.1109/WAC.2002.1049483 [in English]
6. Havrylenko, Y., Cortez, J.I., Kholodniak, Y., Alieksieieva, H., & Garcia, G.T. (2020). Modelling of surfaces of engineering products on the basis of array of points. *Tehnicki Vjesnik*, 27(6), 2034–2043. DOI: 10.17559/tv-20190720081227 [in English]
7. Osipov, V.A. (1979). Machine methods for designing continuous-frame surfaces. M.: Mashinostroenie. [in Russian]
8. Havrylenko, Ye., Kholodniak, Yu., Halko, S., Vershkov, O., Miroshnyk, O., Suprun, O., Dereza, O., et al. (2021). Representation of a Monotone Curve by a Contour with Regular Change in Curvature. *Entropy*, 23 (7):923. DOI: 10.3390/e23070923 [in English]
9. Gavrilenko, E. A., & Kholodnyak, Y. V. (2014). Discretely geometrical modelling of one-dimensional contours with a regular change of differential-geometric characteristics. *Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)*, 1-5. DOI: 10.1109/Dynamics.2014.7005654 [in English]
10. Havrylenko, Ye., Kholodniak, Yu., Ivzhenko, A.V., & Najdysh, A.V. (2020). Assignment of characteristics at contour points with a monotonic change in curvature. *Suchasni problemy modeliuвання*, 16, 91-97. [in Ukrainian]
11. Havrylenko, Ye., Kholodniak, Yu., Halko, S., Vershkov, O., Bondarenko, L., Suprun, O., Miroshnyk, O., et al. (2021). Interpolation with Specified Error of a Point Series Belonging to a Monotone Curve. *Entropy*, 23(5):493. DOI: 10.3390/e23050493 [in English]