УДК 514.18

МОДЕЛЮВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ПОВЕРХОНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗАСОБАМИ GEOGEBRA.

Яковенко А.С., к.ф.-м.н.,
krylovaas@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9707-7810
Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького (Україна)

У роботі розглядається алгоритм створення динамічних моделей деяких властивостей поверхонь другого порядку на прикладі однопорожнинного гіперболоїда в середовищі динамічної математики GeoGebra. Цей спосіб візуалізації тривимірних об'єктів дозволяє швидше та глибше вивчити властивості та геометричні особливості тривимірних об'єктів аналітичної геометрії. Аналіз останніх досліджень показує важливість імплементування в навчальний процес використання динамічного моделювання в 3D середовищі для розвитку просторового мислення та підвищення пізнавальної діяльності студентів. Проте, виходячи з цього аналізу, динамічна математика GeoGebra частіше використовується в шкільній математиці та на рівні двовимірних об'єктів. Однак, простота використання та велика відкрита бібліотека готових моделей вільно поширюваного середовища для експериментів GeoGebra допомагає підвищити якість навчального матеріалу дисциплін математичного циклу для різних форм викладання у вищій школі.

У роботі розглядаються алгоритми побудов динамічних моделей деяких властивостей гіперболоїда в середовищі GeoGebra. Динамічна модель лінійчастості однопорожнинного гіперболоїда має математичне підґрунтя, проте схема побудови обмежених ліній, які задані параметрично, може бути застосована до будь-яких тривимірних об'єктів, які утворюються за допомогою прямих ліній. Побудова моделі гіперболоїда обертання здійснена двома способами. В одному випадку однопорожнинний гіперболоїд утворюється з окремих гіпербол, які поступово обертаються навколо уявної осі, а в другому випадку гіперболоїди є гладкими поверхнями обертання гіперболи до заданого кута. Такі алгоритми можуть бути використаний для будь-якої фігури, яка утворюється шляхом обертання кривої навколо осі. Анімація відтворення поступової побудови об'єктів дає можливість сформувати підґрунтя для розуміння геометричних особливостей просторових об'єктів, які розглядаються.

Матеріали можуть бути використанні при викладанні курсу «аналітична геометрія», «вища математика», а також під час вивчення поведінки деяких об'єктів в тривимірному просторі.

Ключові слова: геометричне моделювання, навчальний процес,

GeoGebra, поверхні другого порядку.

Постановка проблеми. Сьогоденні виклики вищої освіти спонукають до пошуку ефективних засобів діджитал представлення навчального матеріалу в сфері дисциплін математичного циклу. Велику роль в такому підході відіграє візуалізація математичних даних, що стимулює студентів до узагальнення, уточнення сприйманих образів, забезпечує повноту і цілісність їх сприйняття. Одним із засобів візуалізації математичних даних є середовище динамічної математики GeoGebra, що дозволяє візуалізувати властивості тривимірних об’єкти. Досвід як онлайн так і оффлайн викладання теми поверхонь другого порядку, які вивчаються в курсі «Аналітична геометрія» студентами першого курсу, дає змогу зробити висновки, що пояснення викладачем та осмислення студентами властивостей поверхонь займає багато часу. А слабке просторове мислення та не розуміння вигляду просторових об’єктів призводить до помилок та неточностей при розв’язанні задач в рамках цього курсу.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Досліджуючи сфери використання динамічної математики GeoGebra, можна помітити, що більша частина досліджень відноситься до застосування цього засобу в шкільній математиці та двовимірних об’єктах. В статті Коваль Т. І. та Бесклінської О. П. розкриваються шляхи використання програмних засобів візуалізації в процесі створення електронних освітніх ресурсів з математичних дисциплін, що вивчаються у ЗВО на прикладі двовимірних об’єктів [3]. В англомовних книгах «Математичне моделювання: з використанням GeoGebra» [4] та «Вивчення передової евклідової геометрії за допомогою GeoGebra» [5] розкриваються питання моделювання двовимірних процесів. Багато цікавих досліджень про ефективність використання динамічної математики в шкільному курсі. За допомогою педагогічного експерименту старших школах доведено ефективність використання динамічної математики GeoGebra при вивченні просторових понять геометрії за допомогою елементарного моделювання тривимірних обєктів в 3D калькуляторі та доповненої реальності [6, 7, 8]. Використання цього інструменту у сфері вищої освіти не є досить популярним, адже має конкуренцію з професійними пакетами прикладної математики, проте в статтях [9] та [10] розглядаються приклади використання засобів GeoGebra при вивченні лінійних диференціальних рівнянь першого порядку та при викладанні основ будівельних конструкцій. Однак проблемі моделювання властивостей поверхонь другого порядку в дослідження інших авторів не мала достатньої уваги.

Формування цілей статті. Метою роботи є опис алгоритму розробки проєктів моделювання деяких властивостей поверхонь другого порядку на прикладі однопорожнинного гіперболоїда за допомогою двох додатків середовища динамічної математики GeoGebra: 3D калькулятор та GeoGebra Classic.

Основна частина. Під час вивчення геометрії в тривимірному просторі, ми стикнулись із проблемою візуалізації вивченого матеріалу. Складно зрозуміти представлення тривимірної фігури, яка зображена у двовимірній площині. Навіть якщо фігура на зображені тривимірна, але статична, то ми не маємо змоги оцінити її в повній мірі. Для дослідження використовується середовище динамічної математики GeoGebra (https://www.geogebra.org), яке є вільно поширюваним і дає можливість створювати «живі креслення» у різних розділах математики та на різноманітних пристроях: персональному комп’ютері, смартфоні та планшеті. Використання GeoGebra в освітньому процесі допомагає студентам розвиватися, вчитися досліджувати і практично застосовувати математичні методи, вишукувати нові знання та свідомо їх засвоювати.

Розглянемо моделювання деяких властивостей однопорожнинного гіперболоїда, який в загальному випадку має рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

Однією з найцікавіших властивістю, яка широко застосовується в будівництві високих споруд, є лінійчастість. Однопорожнинний гіперболоїд є двічі лінійчастою поверхнею, тобто через кожну точку однопорожнинного гіперболоїда проходять дві різні прямі, повністю розташовані на цій поверхні. Ці прямі параметрично записуються наступним чином [1]

$$\begin{cases} x = a(\cos\alpha + t\sin\alpha), \\ y = b(\sin\alpha - t\cos\alpha), \\ z = \pm ct, \end{cases} \tag{2}$$

де *a, b, c* параметри гіперболоїда (1).

Лінійчата конструкція є жорсткої: якщо балки з'єднати шарнірно, гіперболоїдна конструкція все одно буде зберігати свою форму під дією зовнішніх сил, таких як вітрове та сейсмічне навантаження, яке у ґратчастої конструкції є невеликим. Приклади використання цієї властивості в будівлях зображені на рис. 1.

Для створення динамічної моделі цієї властивості, оберемо параметричний тип завдання прямої для більш наочного відображення прямої в додатку GeoGebra Classic. Команда для завдання параметричного типу прямої в тривимірному просторі має наступний вигляд [2]:

Curve(<Expression>, <Expression>, <Expression>, <Parameter Variable>, <Start Value>, <End Value>)

Ця команда повертає 3D декартову параметричну криву для заданого x-виразу(перше <Expression>), y-виразу (друге <Expression>) та z-виразу (третє <Expression>), використовуючи параметричну змінну *<Parameter Variable>* із заданим інтервалом [Start Value , End Value].

Для анімування цієї властивості, вводимо параметр α у вигляді інструменту «повзунок». Задаємо властивості зміни цього параметра:

максимальне і мінімальне значення від 0 до 6π і крок $\pi/50$. Такі параметри встановлюються експериментально для кращої візуалізації. Також вводимо змінні коефіцієнти a, b, c гіперболоїда (1) шляхом встановлення повзунків з діапазоном від 1 до 5 і кроком відповідно до цілей демонстрації.

Рис. 1. Гіперболічні структури: Аджигольський маяк, диспетчерська вежа міжнародного аеропорту Ньюкасл, телевежа Гуанчжоу

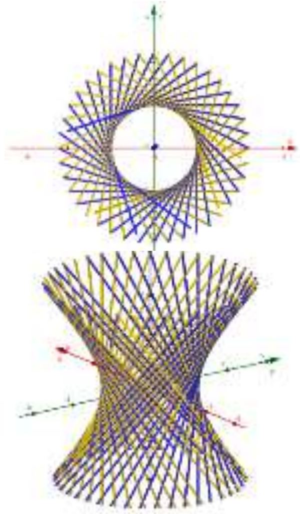

Рис. 2. Результат моделювання лінійчастості гіперболічних структур

Як результат, ми отримуємо анімацію формування однопорожнинного гіперболоїда за допомогою прямих ліній (рис. 2). Така динамічна модель створена шляхом зміни параметра α з досить малим кроком та застосування властивості «залишити слід» до наступних кривих у просторі

Curve(-a sin(α)+a cos(α) t,b cos(α)+b sin(α) t,c t,t,-2,2),

Curve(a sin(α)+a cos(α) t,-b cos(α)+b sin(α) t,c t,t,-2,2),

де a, b, c - змінні коефіцієнти гіперболоїда (1).

Гіперболоїд є фігурою обертання. Таку властивість можна візуалізувати, створивши наступну динамічну модель. Для простоти розглянемо гіперболоїд з одиничним радіусом горлового перерізу та твірною рівносторонньою гіперболою. Тобто рівняння (1) спрощується

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1. \tag{3}$$

Уявною віссю цього гіперболоїда є вісь Oz, тож всі додаткові побудови будемо робити в площині xOy. Поле алгебри, де відображені основні команди побудови цієї моделі, та додаткові побудови зображено на малюнку нижче (рис. 3 (а) та рис. 3 (б) відповідно). Побудуємо горловий переріз гіперболоїда обертання, де будуть знаходиться вершини твірних гіпербол. Для цього застосуємо команду: Circle(<Point>, <Radius>, <Direction>), що створює коло із заданим центром (в нашому випадку це точка O), радіусом (для цієї моделі він одиничний) і віссю, паралельною напрямку (обираємо уявну вісь гіперболоїда). За допомогою інструменту «Точка фігури» відмічаємо точку A, яка належить колу c. Будуємо дійсну вісь гіпербол через точку A та початок координат. Далі знаходимо фокальну відстань гіперболи за формулою $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$, та будуємо коло цього радіусу. Перетин дійсної вісі та кола є фокусами гіперболи. Площина Plane(A, zAxis) є площиною розташування гіпербол, які утворюватимуть гіперболоїд обертання. За допомогою команди: Hyperbola(<Focus>, <Focus>, <Point>, <Plane>) будуємо гіперболу із заданими фокусами, заданою точкою гіперболи та площиною, де ця гіпербола знаходиться. Отже, ховаючи додаткові побудови та застосовуючи властивість «Залишати слід» побудованої гіперболи, ми отримали динамічну модель однопорожнинного гіперболоїда, утворений множиною гіпербол, які обертаються навколо уявної осі гіперболоїда (3) (див. Рис. 3 (в)).

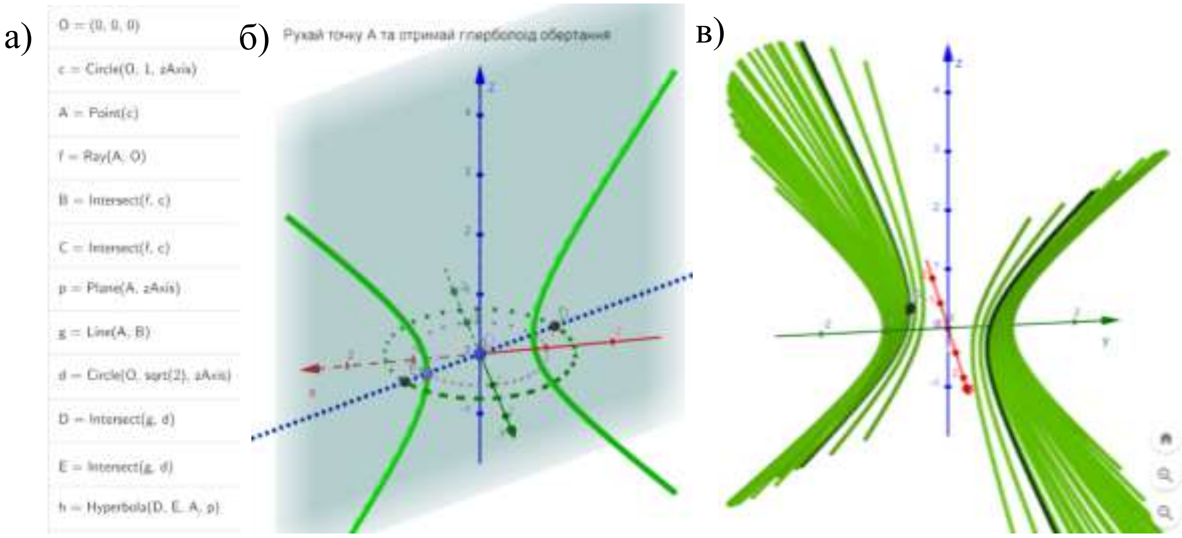

Рис. 3. Динамічна модель однопорожнинного гіперболоїда обертання

Для побудови більш гладкої динамічної моделі застосуємо команду: Surface(<Curve>, <Angle>, <Line>), яка зображає поверхню обертання, *кривої (побудованої раніше гіперболи)* від 0° до заданого *кута*, який ми можемо зробити змінним, навколо *лінії*, яка в нашому випадку є віссю обертання.

Щоб повноцінно оцінити результат обертання гіперболи навколо дійсної та уявної осі створимо динамічний демонстраційний веб проєкт за допомогою демонстраційної можливості середовища GeoGebra. Для цього до поля 3D моделювання додамо ще поле 2D моделювання, на якому відобразимо бігунок, що змінює значення кута обертання відповідної кривої навколо осі, та Check Box, за допомогою якого може приховати або відобразити результат обертання навколо відповідної осі. Додамо ще гіперболу на площину xOy, q(x)=sqrt(x^(2)-1) та використавши наступні команди:

$$j=Surface(h,v°,zAxis)$$
$$k=Surface(q,v°,xAxis),$$

маємо динамічні моделі, які зображені на рис. 4.

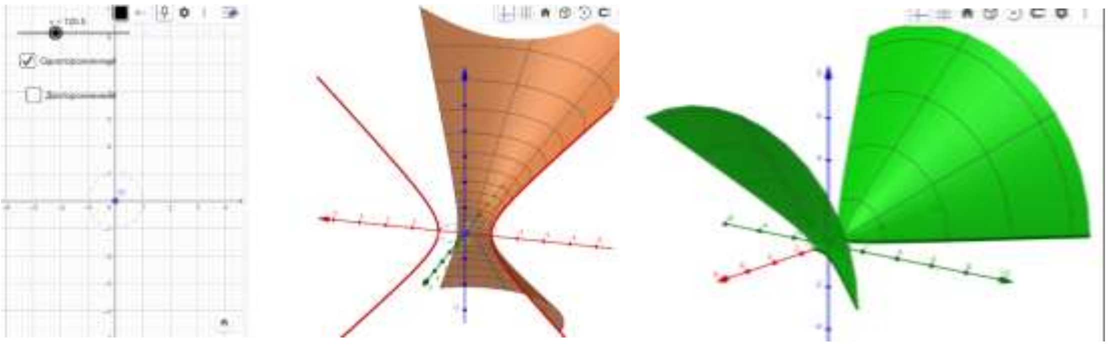

Рис. 4. Динамічна модель обертання гіперболи навколо дійсної та уявної осей

Висновки. Запропоновані алгоритми побудови динамічних моделей деяких властивостей поверхонь другого порядку дають змогу швидко, зрозуміло та наочно продемонструвати поведінку тих елементів цих поверхонь, відображення яких класичними засобами, викликають складнощі.

Література

1. Ямпольський О. Л., Шугайло О. О. Канонічна теорія поверхонь другого порядку: навчально-методичний посібник з аналітично геометрі для студентів математичних факультетів університетів. Харків: ХНУ імені В. Н. Казаріна, 2020. 45 с. Електронний ресурс. URL: http://geometry.karazin.ua/resources/documents/20200406094150_a0c52d8445.pdf (дата звернення: 22.08.2022)
2. GeoGebra Reference Materials. Електронний ресурс. URL: https://wiki.geogebra.org/en/Curve_Command (дата звернення: 24.08.2022)
3. Koval T. I., & Besklinskaya O. P. Use of visualization facilities to create electronic educational resources in the process of teaching mathematical disciplines in Universities. Information Technologies and Learning Tools, 77(3), 145–161. – 2020. URL: https://doi.org/10.33407/itlt.v77i3.3411
4. Jonas Hall. Mathematical Modeling: Applications with GeoGebra. New York Academy of Sciences Ser. John Wiley & Sons, Incorporated. 2016 PRINT ISBN 9781119102724, 570 p.
5. Venema, Gerard. Exploring Advanced Euclidean Geometry with GeoGebra, American Mathematical Society, 2013. ProQuest Ebook Central, https://ebookcentral.proquest.com/lib/sheffield/detail.action?docID=3330337.
6. Widada, W. et al. (2021) ‘Augmented Reality assisted by GeoGebra 3-D for geometry learning’, Journal of Physics: Conference Series, 1731(1), p. 12034.

doi: 10.1088/1742-6596/1731/1/012034.
7. Uwurukundo, M. S., Maniraho, J. F. and Tusiime Rwibasira, M. (2022) ‘Effect of GeoGebra Software on Secondary School Students’ Achievement in 3-D Geometry’, Education and information technologies, 27(4), pp. 5749–5765. doi: 10.1007/s10639-021-10852-1.
8. Elfa, N., Ikhsan, M. and Marwan (2021) ‘Students’ spatial ability through Geogebra-assisted discovery learning model’, in AIP Conference Proceedings. Melville: American Institute of Physics. doi: 10.1063/5.0045494.
9. Orta, B. et al. (2022) ‘Teaching Building Structures Graphical Methods with GeoGebra’, Advances in building education, 6(1), pp. 23–36. doi: 10.20868/abe.2022.1.4811
10. Funes, J. O., Martin, P. and Valero Kari, E. R. (2021) ‘First-order linear partial differential equations using the GeoGebra and GeoGebra 3D graphing calculator’, Journal of Physics: Conference Series, 1730(1), p. 12066. doi: 10.1088/1742-6596/1730/1/012066.

MODELING OF PROPERTIES OF SECOND-ORDER SURFACES USING GEOGEBRA

Anastasia Yakovenko

The paper proposes an algorithm for creating dynamic models of some properties of second-order surfaces using the example of a hyperboloid of one sheet in the dynamic mathematics software GeoGebra. This method of visualization of analytical geometry’s three-dimensional objects allows studying the properties and geometric features of such objects faster and more deeply. The analysis of the latest research shows the importance of implementing the use of dynamic modeling in a 3D environment into the educational process for the development of spatial thinking and increasing students' cognitive activity. However, based on this analysis, dynamic mathematic GeoGebra is more often used in school mathematics and at the level of two-dimensional objects. However, ease of use and a large open library of ready-made models of the freely distributed environment for experiments GeoGebra helps to improve the quality of educational material of the disciplines of the mathematical cycle for various forms of teaching in higher education.

Algorithms for constructing dynamic models of some properties of a hyperboloid in the GeoGebra environment are considered in the paper. The dynamic model of linearity of a one sheet hyperboloid has a mathematical basis, but the scheme of constructing limited parametric lines can be applied to any three-dimensional objects that are formed by straight lines. The construction of the model of the rotation hyperboloid is carried out in two ways. In one case, a one sheet hyperboloid is formed from separate hyperbolas that gradually rotate around an imaginary axis, and in the second case, the hyperboloids are smooth surfaces of rotation of the hyperbola up to a given angle. Such algorithms can be used for any figure that is formed by rotating a curve around an axis. The *animation of the reproduction of the gradual construction of objects provides an opportunity to form the basis for understanding the geometric features of the spatial objects under consideration. The materials can be used when teaching the course "analytical geometry", "higher mathematics", as well as when studying the behavior of some objects in three-dimensional space.*

Keywords: geometric modelling, educational process, GeoGebra, second-order surfaces.

References

1. Yampolskyi O.L., Shugailo O.O. (2020) Canonical theory of surfaces of the second order: a teaching and methodical manual of analytical geometry for students of mathematical faculties of universities. Kharkiv: V. N. Karazin KhNU [in Ukrainian]
2. GeoGebra Reference Materials URL: https://wiki.geogebra.org/en/Curve_Command
3. Koval T.I., & Besklinskaya O.P. (2020) Use of visualization facilities to create electronic educational resources in the process of teaching mathematical disciplines in Universities. Information Technologies and Learning Tools, 77(3), 145–161. URL: https://doi.org/10.33407/itlt.v77i3.3411
4. Jonas Hall. (2016) Mathematical Modeling: Applications with GeoGebra. New York Academy of Sciences Ser. John Wiley & Sons, Incorporated. PRINT ISBN 9781119102724, 570 p.
5. Venema, Gerard. Exploring Advanced Euclidean Geometry with GeoGebra, American Mathematical Society, 2013. ProQuest Ebook Central, https://ebookcentral.proquest.com/lib/sheffield/detail.action?docID=3330337.
6. Widada, W. et al. (2021) ‘Augmented Reality assisted by GeoGebra 3-D for geometry learning’, Journal of Physics: Conference Series, 1731(1), p. 12034. doi: 10.1088/1742-6596/1731/1/012034.
7. Uwurukundo, M. S., Maniraho, J. F. and Tusiime Rwibasira, M. (2022) ‘Effect of GeoGebra Software on Secondary School Students’ Achievement in 3-D Geometry’, Education and information technologies, 27(4), pp. 5749–5765. doi: 10.1007/s10639-021-10852-1.
8. Elfa, N., Ikhsan, M. and Marwan (2021) ‘Students’ spatial ability through Geogebra-assisted discovery learning model’, in AIP Conference Proceedings. Melville: American Institute of Physics. doi: 10.1063/5.0045494.
9. Orta, B. et al. (2022) ‘Teaching Building Structures Graphical Methods with GeoGebra’, Advances in building education, 6(1), pp. 23–36. doi: 10.20868/abe.2022.1.4811
10. Funes, J. O., Martin, P. and Valero Kari, E. R. (2021) ‘First-order linear partial differential equations using the GeoGebra and GeoGebra 3D graphing calculator’, Journal of Physics: Conference Series, 1730(1), p. 12066. doi: 10.1088/1742-6596/1730/1/012066.