

УДК. 514.18

ЗАЛЕЖНОСТІ ВЕЛИЧИН КІНЦЕВОЇ РІЗНИЦІ ТА ВЕЛИЧИН КОЕФІЦІЄНТІВ СУПЕРПОЗИЦІЇ ДВОХ ТОЧОК ДИСКРЕТНИХ КРИВИХ

Воронцов О.В., к.т.н.,

voronoleg6163@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7339-9196

*Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія
Кондратюка» (Україна)*

Воронцова І.В., к.пед.н.,

ira061061@gmail.com, ORCID: 0000-0001-9131-2816

Полтавський коледж нафти і газу

*Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія
Кондратюка» (Україна)*

Формування дискретних моделей n -вимірних геометричних образів (ГО) передбачає залучення методів, що вимагають використання значних обчислювальних ресурсів. Геометричний об'єкт довільної форми завжди може бути представлений впорядкованою множиною точок за певним законом так, щоб можна було визначити координати будь-якої точки всередині контуру (області). Питанням є лише необхідна щільність вихідної інформації та затрати на її одержання, обробку і зберігання.

Тому необхідно проводити дослідження нових методів формування (ГО) які дозволяють забезпечити мінімальні витрати на отримання результату. Використання геометричного апарату суперпозицій при формування дискретних моделей (ГО) статико-геометричним методом дозволяє визначати координати вузлів дискретних каркасів за координатами мінімальної кількості заданих вузлів без складання додаткових великих систем лінійних рівнянь.

Задачею даної роботи, зокрема, є дослідження методики формування дискретних образів кривих ліній на основі класичного методу кінцевих різниць, статико-геометричного методу моделювання і геометричного апарату суперпозицій.

У даній статті запропоновано методика виведення аналітичних залежностей щодо визначення дискретних величин коефіцієнтів суперпозиції двох заданих вузлових точок та формоутворюючої величини кінцевої різниці для моделювання одновимірних геометричних образів на основі заданої симетричної розрахункової схеми.

Дана методика може бути застосована для виведення подібних аналітичних залежностей, що дозволяють визначати величини коефіцієнтів суперпозиції двох заданих вузлових точок на основі будь-яких числових послідовностей та довільних розрахункових схем і, тим самим розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції одновимірними

числовими послідовностями широкого спектру елементарних функцій.

Ключові слова: дискретне моделювання, статико-геометричний метод, геометричний апарат суперпозицій, величина кінцевої різниці, коефіцієнти суперпозиції.

Постановка проблеми. Необхідність оперативного втручання у хід розрахунків в задачах проектування інженерних споруд і мереж, будівельних та машинобудівних виробів за допомогою різних САПР вимагає подальшого удосконалення алгоритмів створення геометричних прообразів об'єктів та процесів, що не вимагають значних затрат обчислювальних ресурсів.

Одним із важливих напрямів дискретної геометрії є статико-геометричний метод, створений на основі статичної інтерпретації класичного методу кінцевих різниць. Однак головним його недоліком є необхідність складання і розв'язання громіздких систем лінійних рівнянь. Цього недоліку можна позбутися за рахунок використання геометричного апарату суперпозицій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питанням застосування для дискретного моделювання ГО геометричного апарату суперпозицій в поєднанні з класичним методом кінцевих різниць, статико-геометричним методом, математичним апаратом числових послідовностей присвячені роботи авторів даної статті [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є створення методики виведення аналітичних залежностей для визначення дискретних величин коефіцієнтів суперпозиції двох заданих вузлових точок та формоутворюючої величини кінцевої різниці для моделювання одновимірних геометричних образів

Основна частина. Твердження. Координату будь-якої точки числової послідовності n -го степеня можна визначити як суперпозицію координат двох довільних точок даної послідовності при відомій величині кінцевої різниці [4].

Враховуючи результати досліджень [1, 2, 3, 4], зможемо скласти систему рівнянь (1):

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^2 k_n = 1; \\ \sum_{n=1}^2 k_n i_n = i; \\ \sum_{n=1}^2 k_n y_{i_n} + P_{i_0} = y_{i_0}, \end{cases} \quad (1)$$

для виведення формул обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1 , k_2 та ординати шуканого вузла y_{i_0} за даними координатами двох довільних вузлових точок певної числової послідовності та величиною кінцевої різниці P_{i_0} у шуканому вузлі, а також для виведення формул обчислення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1 , k_2 та величини кінцевої P_{i_0} різниці у шуканому вузлі за даними координатами двох довільних

вузлових точок та ординатою y_{i_0} .

Також, враховуючи результати досліджень [1, 2, 3, 4], зможемо скласти систему рівнянь (2):

$$\begin{cases} i_0 = k_1 i_1 + (1 - k_1) i_2; \\ y_{i_0} = k_1 y_{i_1} + (1 - k_1) y_{i_2} + P_{i_0}, \end{cases} \quad (2)$$

для виведення формул обчислення величини одного коефіцієнту суперпозиції (k_1 чи k_2) та ординати шуканого вузла y_{i_0} за даними координатами двох довільних вузлових точок певної числової послідовності та величиною кінцевої різниці P_{i_0} у шуканому вузлі, а також для виведення формул обчислення величини одного коефіцієнту суперпозиції (k_1 чи k_2) та величини кінцевої P_{i_0} різниці у шуканому вузлі за даними координатами двох довільних вузлових точок та ординатою y_{i_0} вузла певної числової послідовності:

Розв'язавши систему (2), знайдемо вирази (3), (4), (5) для обчислення величини коефіцієнту суперпозиції та ординати шуканого вузла:

$$k_1 = \frac{(i_2 - i_0)}{(i_2 - i_1)}; \quad (3)$$

$$y_{i_0} = \frac{i_2 y_{i_1} - i_1 y_{i_2} + i_0 (y_{i_2} - y_{i_1})}{i_2 - i_1} + P_{i_0}, \quad (4)$$

а також, для обчислення величини коефіцієнту суперпозиції та величини кінцевої різниці у шуканому вузлі:

$$P_{i_0} = \frac{i_1 y_{i_2} - i_2 y_{i_1} + i_0 (y_{i_1} - y_{i_2})}{i_2 - i_1} + y_0. \quad (5)$$

Для вихідних умов (6):

$$i_1 = 10, i_2 = 0; y_{i_1} = 100, y_{i_2} = 0, \quad (6)$$

розрахункової схеми, представленої на рисунку 1, обчислимо величини коефіцієнтів суперпозиції k_1 і k_2 за формулами (3).



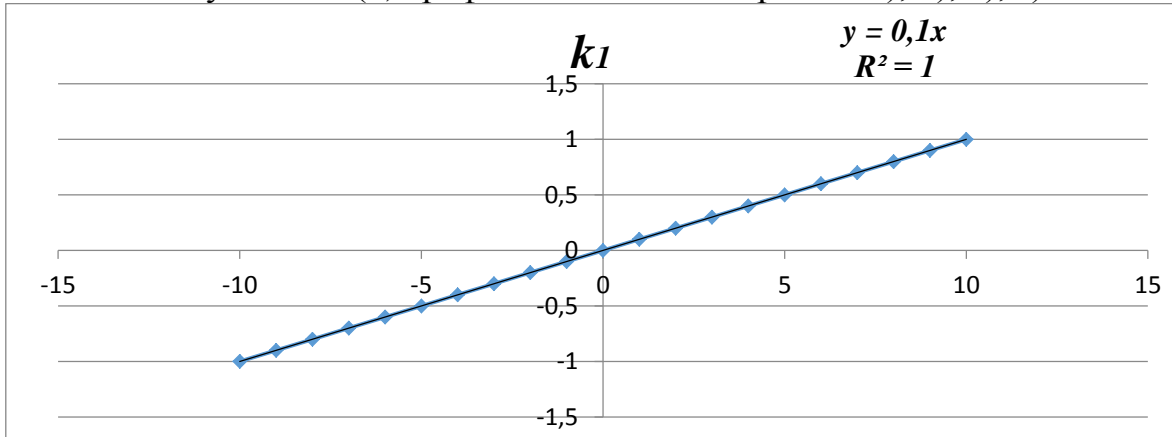
Рис. 1. Розрахункова схема моделювання кривих за симетричними вихідними умовами:

$$i_1 = -10; i_2 = 0; i_3 = 10; y_{i_1} = 100; y_{i_2} = 0, 2, 4, 6, 8, 10; y_{i_3} = 100.$$

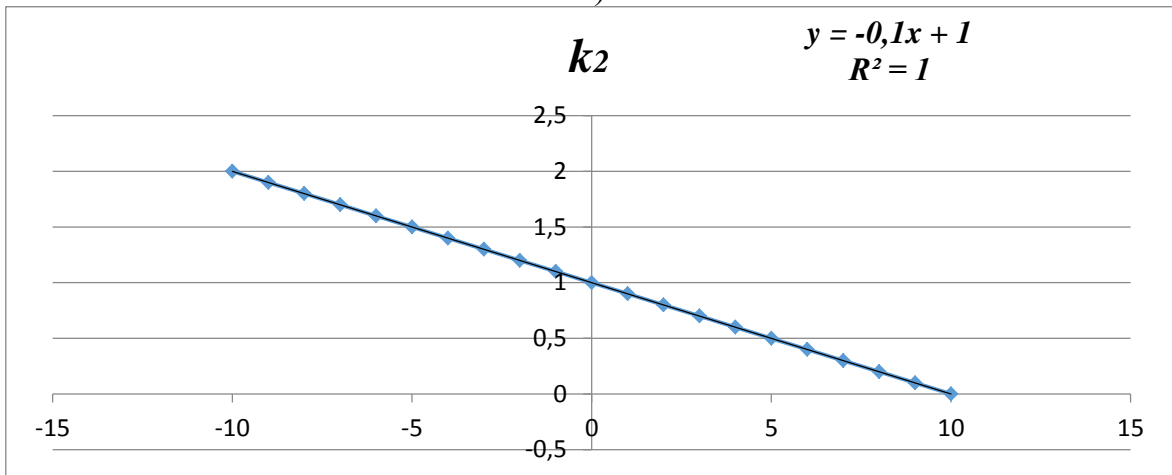
Результати обчислень дискретних значень величин коефіцієнтів суперпозиції k_1 і k_2 , величини кінцевої різниці, ординат шуканих вузлів для заданих вузлів $i_1 = 10$, $y_{i_1} = 100$; $i_2 = 0$, $y_{i_2} = 0$ за формулами (3) на основі числової послідовності (7):

$$y_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2, \quad (7)$$

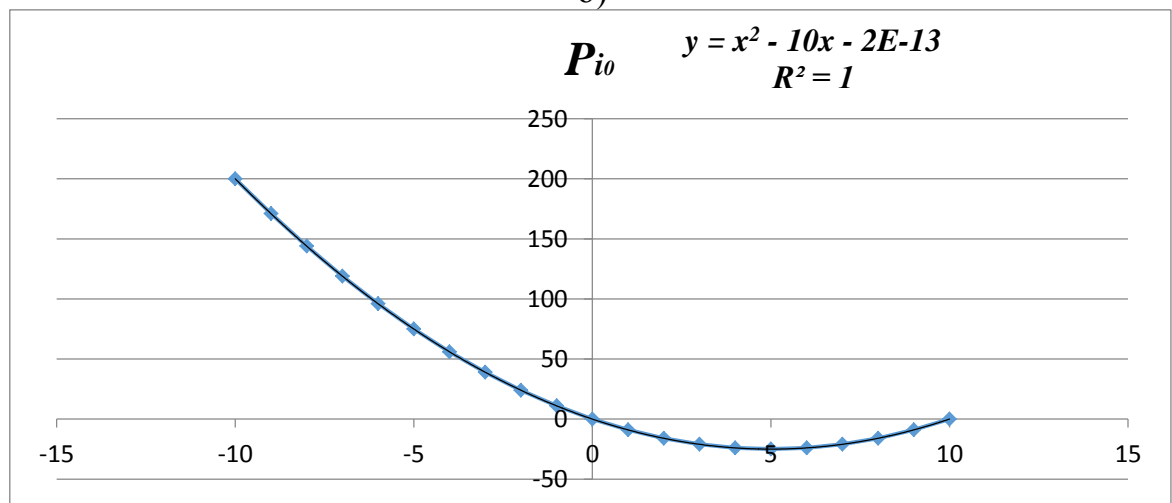
за вихідними умовами (6) графічно показано на рис. 2: а), б), в), г).



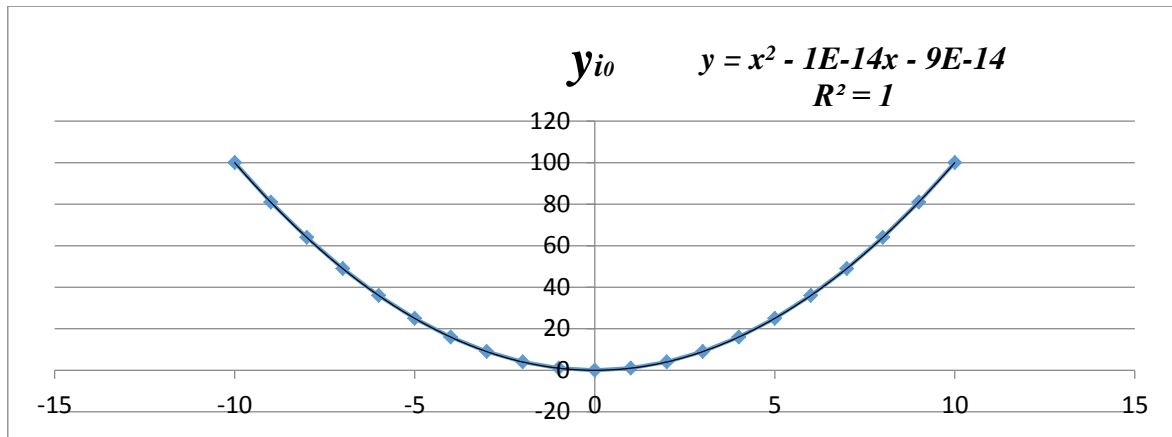
а)



б)



в)



г)

Рис. 2. а), б), в), г). Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції k_1 і k_2 , величини кінцевої різниці P_{i_0} та ординат шуканих вузлів y_{i_0} для вихідних умов:

$$i_1 = 10, y_{i_1} = 100; i_2 = 0, y_{i_2} = 0$$

Але одночасно, враховуючи дослідження [2, 4] можемо записати:

$$k_1 = \frac{P_{i_0} - y_{i_0} + y_{i_2}}{y_{i_2} - y_{i_1}}; k_2 = \frac{P_{i_0} - y_{i_0} + y_{i_1}}{y_{i_1} - y_{i_2}}. \quad (8)$$

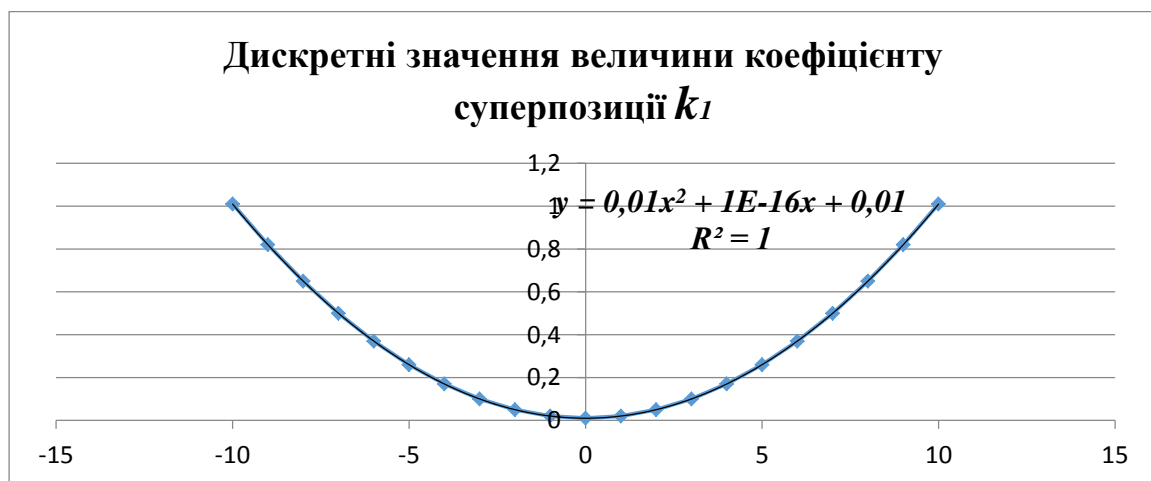
Розглянемо процес формування одновимірних геометричних образів на основі числової послідовності (7), суперпозиціями координат двох заданих вузлових точок при відомій рівномірно розподіленій між вузлами модельованого образу величині кінцевої різниці.

Для вихідних умов (9):

$$i_1 = 10, i_2 = 0; y_{i_1} = 100, y_{i_2} = 0; P_{i_0} = -1, \quad (9)$$

розрахункової схеми, представленої на рисунку 1, обчислимо величини коефіцієнтів суперпозиції k_1 і k_2 за формулами (8), де: $k_1 + k_2 = 1$.

Результати обчислень дискретних значень величин коефіцієнтів суперпозиції k_1 і k_2 за формулами (8) на основі числової послідовності (7) графічно показано на рис. 3 а), б).



а)

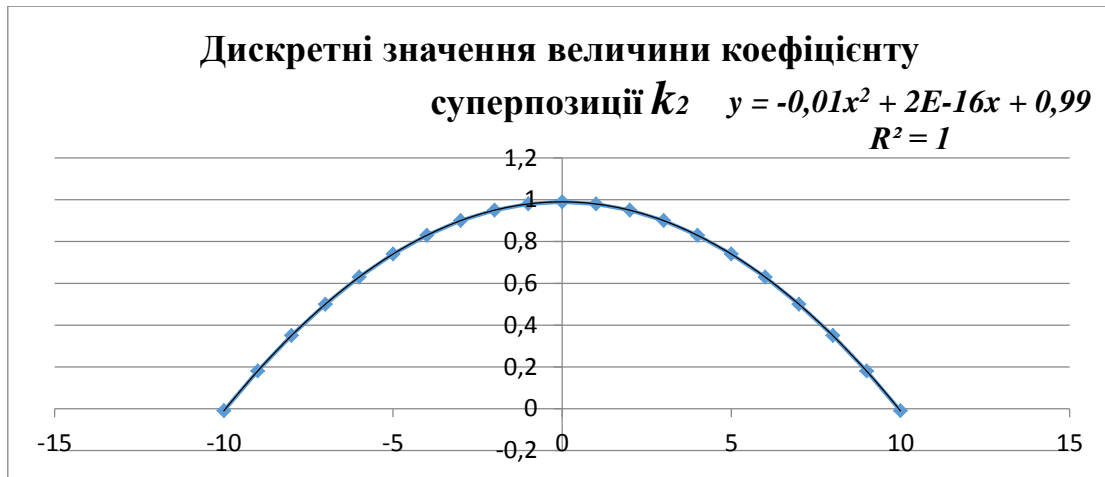


Рис. 3. а), б). Дискретні значення величин коефіцієнтів
суперпозиції k_1 , k_2 для $y_{i_2} = 0$, $P_{i_0} = -1$.

Дискретні значення величин коефіцієнтів суперпозиції аналітично описуються замкненими формами числових послідовностей (10):

$$k_1: y_i = 0,01i^2 + 0,01 ; k_2: y_i = -0,01i^2 + 0,99. \quad (10)$$

Ординати y_{i_0} модельованих кривих будуть визначені із формул (2):

$$y_{i_0} = P_{i_0} - k_1(y_{i_2} - y_{i_1}) + y_{i_2}, \quad (11)$$

або, із формул [2, 4]:

$$y_{i_0} = P_{i_0} + k_1y_{i_1} + k_2y_{i_2}, \quad (12)$$

за вихідними умовами (6), у яких постійними величинами будуть:

$$i_1 = 10, i_2 = 0 ; y_{i_1} = 100 ,$$

а змінними величинами будуть y_{i_2} та P_{i_0} .

Ординати y_{i_0} модельованих кривих для $i_1 = 10$ будуть завжди дорівнювати y_{i_1} , і, конкретно для вихідних даних (6), будуть дорівнювати 100, тобто – $y_{i_0} = y_{i_1} = 100$.

Тому при заданій змінній величині y_{i_2} , величину кінцевої різниці P_{i_0} зможемо визначити із (12):

$$P_{i_0} = y_{i_0} - k_1y_{i_1} - k_2y_{i_2} . \quad (13)$$

Наприклад, якщо у вихідних даних (6) ордината центрального вузла y_{i_2} буде дорівнювати 1: $y_{i_2} = 1$, то, за умови $y_{i_0} = y_{i_1} = 100$, за формулою (13):

$$\begin{aligned} P_{i_0} &= y_{i_0} - k_1y_{i_1} - k_2y_{i_2} = y_{i_1} - k_1y_{i_1} - k_2y_{i_2} = \\ &= 100 - 1,01 \cdot 100 - (-0,01) \cdot 1 = -0,99 . \end{aligned}$$

Або, навпаки, наприклад, величина кінцевої різниці P_{i_0} буде дорівнювати $-0,99$: $P_{i_0} = -0,99$, то, за умови $y_{i_0} = y_{i_1} = 100$, за формулою (12):

$$y_{i_0} = P_{i_0} + k_1y_{i_1} + k_2y_{i_2} \Rightarrow y_{i_1} = P_{i_0} + k_1y_{i_1} + k_2y_{i_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{i_2} = \frac{y_{i_1} - P_{i_0} - k_1 y_{i_1}}{k_2} = \frac{100 - (-0,99) - 1,01 \cdot 100}{-0,01} = 1.$$

Якщо змінювати рівномірно розподілену величину кінцевої різниці або величину ординати фіксованого (одного із двох заданих вузлів), при фіксованих величинах коефіцієнтів суперпозиції двох довільно заданих вузлових точок, зможемо управляти формою кривої, дискретно представленої вузловими точками її числової послідовності.

Висновки. У даній статті запропоновано методику виведення аналітичних залежностей щодо визначення дискретних величин коефіцієнтів суперпозиції двох заданих вузлових точок та формоутворюючої величини кінцевої різниці для моделювання одновимірних геометричних образів.

Дана методика може бути застосована для виведення подібних аналітичних залежностей, що дозволяють визначати величини коефіцієнтів суперпозиції двох заданих вузлових точок на основі будь-яких числових послідовностей та довільних розрахункових схем і, тим самим розв'язувати задачі суцільної дискретної інтерполяції одновимірними числовими послідовностями широкого спектру елементарних функцій.

Література

1. Воронцов О.В., Воронцова І.В. Дискретна інтерполяція суперпозиціями координат трьох точок одновимірних числових послідовностей на прикладі дробово-лінійних функцій. *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь: МДПУ, 2020. Випуск 18. С. 90-98. <https://doi.org/10.33842/2313-125X/2020/18/90/98>.
2. Воронцов О.В., Воронцова І.В., Тулупова Л.О. Величина рекурентної залежності у формуванні дискретних кривих на основі суперпозиції одновимірних точкових множин. *Сучасні проблеми моделювання*: Мелітополь: МДПУ, 2016. Випуск 5. С. 24 – 29. <http://reposit.pntu.edu.ua/handle/PoltNTU/249>.
3. Воронцов О.В., Воронцова І.В. Спосіб одновимірної дискретної інтерполяції за координатами трьох точок числових послідовностей на прикладі показникових функцій. *Прикладні питання математичного моделювання*. Херсон: ХНТУ, 2020. Т.3, №2.2. С. 35 – 43. <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.3>.
4. Воронцов О.В., Воронцова І.В. Дискретне моделювання геометричних образів об'єктів проектування суперпозиціями одновимірних числових послідовностей з урахуванням функціонального навантаження. *Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво)*. Полтава: ПолтНТУ, 2015. Вип. 3(45). С. 28 – 39.
5. Воронцов, О.В., Усенко В.Г., Воронцова І.В. Систематизація поліноміальних кривих за виглядом функції зовнішнього формоутворюючого навантаження або величини кінцевої різниці.

- Прикладна геометрія та інженерна графіка*. К.: КНУБА, 2022. Вип. 103. С. 23-37. <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2022.103/23-27>.
6. Воронцов, О.В., Усенко В.Г., Воронцова І.В. Величина кінцевої різниці у формуванні одновимірних геометричних образів представлених числовими послідовностями елементарних функціональних залежностей. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. К.: КНУБА, 2022. Вип. 102. С. 39-55. <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2022.102.39-55>.
7. Воронцов, О.В., Усенко В.Г., Воронцова І.В. Дискретна інтерполяція суперпозиціями координат чотирьох точок двовимірних точкових множин на прикладі параболічних поверхонь. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. К.: КНУБА, 2022. Вип. 101. С. 19-33. <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.101.19-33>.

THE FINITE DIFFERENCE DEPENDENCIES AND THE SUPERPOSITION COEFFICIENTS OF TWO POINTS OF DISCRETE CURVES

Oleg Vorontsov, Irina Vorontsova

The discrete models' formation of n-dimensional geometric images (GO) involves using of methods that require the application of significant computing resources. A geometric object of an arbitrary shape can always be represented by an ordered set of points according to a certain law so that the coordinates of any point inside the contour (area) can be determined. The only question is the necessary density of the source information and the costs of its acquisition, processing, and storage.

Consequently, it is necessary to conduct research on new methods of formation (GO) that allow ensuring minimum costs for obtaining results. The use of the geometric apparatus of superposition in the formation of discrete models (GO) by the static-geometric method allows determining the coordinates of nodes of discrete frames based on the coordinates of the minimum number of specified nodes without compiling additional large systems of linear equations.

The aim of this work, in particular, is to study the method of forming discrete images of curved lines based on the classical method of finite differences, the static-geometric modeling method, and the geometric apparatus of superposition.

The article proposes a technique for deriving analytical dependencies for discrete values determining the superposition coefficients of two given nodal points and the shape-forming value of the finite difference for modeling one-dimensional geometric images based on a given symmetrical calculation scheme.

This procedure can be applied to derive similar analytical dependencies, which allow determining the values of the superposition coefficients of two given nodal points on the basis of any numerical sequences and arbitrary calculation schemes and, thus, solving problems of continuous discrete interpolation with

one-dimensional numerical sequences of a wide range of elementary functions.

Keywords: discrete modeling, static-geometric method, geometric apparatus of superposition, finite difference value, superposition coefficients.

References

1. Vorontsov O.V., Vorontsova I.V. (2020) Dyskretna interpoliatsiia superpozytsiiamy koordynat trokh tochok odnovymirnykh chyslovykh poslidovnostei na prykladi drobovo-liniinykh funktsii. *Suchasni problemy modeliuвання*. Melitopol: MDPU. 18. 90-98. <https://doi.org/10.33842/2313-125X/2020/18/90/98> [in Ukrainian].
2. Vorontsov O.V., Vorontsova I.V., Tulupova L.O. (2016) Velychyna rekurentnoi zalezhnosti u formuvanni dyskretnykh kryvykh na osnovi superpozytsii odnovymirnykh tochkovykh mnozhyn *Suchasni problemy modeliuвання*. Melitopol: MDPU. 5. 24-29. Retrieved from: <http://reposit.pntu.edu.ua/handle/PoltNTU/249> [in Ukrainian].
3. Vorontsov O.V., Vorontsova I.V. (2020) Sposib odnovymirnoi dyskretnoi interpoliatsii za koordynatamy trokh tochok chyslovykh poslidovnostei na prykladi pokaznykovykh funktsii. *Prykladni pytannia matematychnoho modeliuвання*. Kherson: KhNTU, T.3, №2.2. 35-43. <https://doi.org/10.32782/KNTU2618-0340/2020.3.2-2.3> [in Ukrainian].
4. Vorontsov O.V., Vorontsova I.V. (2015) Dyskretno modeliuвання heometrychnykh obraziv obiektiv proektuvannya superpozytsiiamy odnovymirnykh chyslovykh poslidovnostei z urakhuvanniam funktsionalnogo navantazhennia. *Zbirnyk naukovykh prats (haluzeve mashynobuduvannya, budivnytstvo)*. Poltava: PoltNTU. 3(45). 28-39 [in Ukrainian].
5. Vorontsov, O.V., Usenko V.H., Vorontsova I.V. Systematyzatsiia polinomialnykh kryvykh za vyhliadom funktsii zovnishnogo formoutvoriuiuchoho navantazhennia abo velychyny skinchenoi riznytsi. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. K.: KNUBA. 103. 23-37. <https://doi.org/10.32347/0131-579x.2022.103/23-27> [in Ukrainian].
6. Vorontsov, O.V., Usenko V.H., Vorontsova I.V. (2022) Velychyna skinchenoi riznytsi u formuvanni odnovymirnykh heometrychnykh obraziv predstavlenykh chyslovyamy poslidovnostiamy elementarnykh funktsionalnykh zalezhnosti. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. K.: KNUBA. 102. 39-55. <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2022.102.39-55> [in Ukrainian].
7. Vorontsov, O.V., Usenko V.H., Vorontsova I.V. (2022) Dyskretna interpoliatsiia superpozytsiiamy koordynat chotyrok tochok dvovymirnykh tochkovykh mnozhyn na prykladi parabolichnykh poverkhon. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika*. K.: KNUBA, 2022. 101. 19-33. <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.101.19-33> [in Ukrainian].