

УДК 621.833+519.863

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗУБЧАСТИХ ПЕРЕДАЧ ІЗ ПІДВИЩЕНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ПЕРЕКРИТТЯ

Черельов С.В.,*

s1515@tmm-sapr.org, ORCID: 0000-0002-2046-3913

Устиненко О.В., к.т.н.,

ustin1964@tmm-sapr.org, ORCID: 0000-0002-6714-6122

Бондаренко О.В., к.т.н.,

avbondko@gmail.com, ORCID: 0000-0002-2693-5301

*Національний технічний університет "Харківський
політехнічний інститут" (Харків, Україна)*

Протасов Р.В.,

protasov@tmm-sapr.org, ORCID: 0000-0003-1611-0610

Словацький технічний університет (Братислава, Словаччина)

Андрієнко С.В.,*

andrisergejjsv@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4310-3128

*Харківський національний автомобільно-дорожній університет (Харків,
Україна)*

Зниження маси та габаритів зубчастих передач є актуальною задачею сучасного машинобудування. Одним із перспективних шляхів її розв'язання для евольвентних прямозубцевих передач є застосування зачеплення зі збільшеною робочою висотою зубців та коефіцієнтом торцевого перекриття $\varepsilon_\alpha \geq 2$. Дослідження присвячено розробці математичної моделі оптимізації саме таких передач. Критерій оптимальності сформульовано наступним чином: контактні напруження у полюсі зачеплення повинні приймати мінімально можливе значення при виконанні усіх конструктивних, геометро-кінематичних та технологічних обмежень, насамперед, при забезпеченні коефіцієнта торцевого перекриття $\varepsilon_\alpha \geq 2$. Записані рівняння, що складають математичну модель оптимізації. Визначені змінні проектування: коефіцієнти висоти головки зубців вихідних контурів шестерні та колеса h_{a1}^ , h_{a2}^* ; кут профілю вихідного контуру α ; коефіцієнт зміщення вихідного контуру шестерні x_1 . Сформовано систему обмежень на змінні проектування: основне функціональне обмеження на мінімальну величину коефіцієнта торцевого перекриття – $\varepsilon_\alpha \geq 2$; обмеження на коефіцієнти висоти головки зубців вихідних контурів шестерні та колеса h_{a1}^* , h_{a2}^* ; обмеження на кут профілю вихідного контуру α ; обмеження на значення коефіцієнтів зміщення вихідного контуру x_1, x_2 ; відсутність підрізання ніжок зубців шестерні та колеса; відсутність загострення вершин зубців шестерні та*

* Науковий керівник – к.т.н., доц., с.н.с. Устиненко О.В.

колеса; відсутність інтерференції у зачепленні; умова забезпечення міцності зубців шестерні та колеса при згині. У якості метода розв'язання задачі обрано зондування простору параметрів за допомогою точок ЛПт-послідовності. Метод дає змогу оперувати значною кількістю параметрів – до 51, забезпечує достатньо велику кількість рівномірно-розподілених пробних точок – до 2^{20} . У подальших дослідженнях планується розробити методики та алгоритми розв'язання задачі, а також провести тестові та перевірочні розрахунки з метою підтвердження та оцінки отриманих теоретичних результатів.

Ключові слова: зубчаста передача, коефіцієнт торцевого перекриття, контактні напруження, оптимізація, цільова функція, змінні проектування, обмеження на змінні проектування.

Постановка проблеми. Підвищення навантажувальної здатності механічних приводів на основі зубчастих передач є однією з актуальних задач сучасного світового машинобудування.

Навантажувальна здатність закритої зубчастої передачі визначається насамперед рівнем контактних напружень у зачепленні. Традиційні евольвентні передачі, поряд із перевагами, мають і суттєві недоліки, які не дозволяють значно знизити контактні напруження у зачепленні. Це, в першу чергу, двоопуклий контакт зубців, що підвищує рівень контактних напружень, а також безпосередня залежність між радіусом кривизни евольвентного профіля ρ та радіусом (габаритом) зубчастого колеса r . Тому збільшення радіусів кривизни спряжених профілів зубців, яке веде до зниження контактних напружень, спричиняє зростання розмірів та маси передачі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Одним із шляхів суттєвого підвищення навантажувальної здатності зубчастих передач за критерієм контактної міцності є використання евольвентного зачеплення з геометричними параметрами, що забезпечують сумарний коефіцієнт перекриття ε_γ більш, ніж 2 [1, 2]. У цьому випадку одна пара зубців передає лише частину потужності N (у чисто теоретичному ідеальному варіанті $N / [\varepsilon_\gamma]$, де $[\varepsilon_\gamma]$ – ціла частина ε_γ).

У косозубцевих та шевронних передачах це досягається в основному за рахунок осьового перекриття зубців з коефіцієнтом $\varepsilon_\beta > 1$. Такі передачі мають вельми широке застосування. Наприклад, відомі серійні шевронні передачі у турбінобудуванні із сумарним коефіцієнтом перекриття $\varepsilon_\gamma \approx 6$ [1].

У прямозубцевих передачах, які є основними, наприклад, для планетарних приводів, осьове перекриття зубців відсутнє. Для них, з метою досягнення коефіцієнта торцевого перекриття $\varepsilon_\alpha \geq 2$, рекомендують так зване НСР-зачеплення, у якому збільшують робочу висоту зубців шляхом застосовування нестандартних вихідних контурів зі збільшеними коефіцієнтами висоти головки та ніжки [3, 4], а також використовують зменшені кути профілю вихідного контуру, наприклад $14,5^\circ$ [1].

Але на наш час прямозубцеві передачі зі збільшеною робочою висотою зубців та коефіцієнтом торцевого перекриття $\varepsilon_\alpha \geq 2$ не набули значного поширення. Це пов'язано насамперед з декількома причинами. А саме, коефіцієнт торцевого перекриття $\varepsilon_\alpha \geq 2$ в реальній передачі можливо реалізувати лише при високій точності обробки зубців, коли їхні пружні деформації під навантаженням переважають похибки кроку зачеплення [5]. Також збільшення коефіцієнтів висоти головки та ніжки при одночасному зменшенні кута профілю вихідного контуру призводить до зростання рівня напружень згину у корені зубця. Але основна причина полягає в тому, що при збільшенні коефіцієнтів висоти головки та ніжки з одночасним зменшенням кута профілю вихідного контуру суттєво підвищується ризик підрізання та інтерференції зубців у зачепленні. А зменшення кута профілю також призводить до деякого зростання рівня контактних напружень.

Вихід із цього можливий, якщо визначати основні геометричні параметри зачеплення за допомогою методів математичної оптимізації. Варіюючи цими параметрами з урахуванням конструктивних, геометричних та технологічних обмежень, ми маємо можливість отримати евольвентну прямозубцеву передачу з мінімальними контактними напруженнями (мінімальні габарити та маса) при виконанні умови $\varepsilon_\alpha \geq 2$.

Формулювання цілей статті. Метою цієї статті є побудова математичної моделі оптимізації геометрії евольвентних циліндричних прямозубцевих передач за критерієм мінімізації контактних напружень при забезпеченні коефіцієнта торцевого перекриття $\varepsilon_\alpha \geq 2$, а саме, побудова цільової функції; визначення змінних проектування; формування системи обмежень; обрання методу розв'язання оптимізаційної задачі.

Основна частина. Побудова цільової функції за критерієм мінімізації контактних напружень у зачепленні. Критерій оптимальності запропонуємо у наступному вигляді: контактні напруження у полюсі зачеплення повинні приймати мінімально можливе значення при виконанні усіх конструктивних, геометро-кінематичних та технологічних обмежень, насамперед, при забезпеченні коефіцієнта торцевого перекриття $\varepsilon_\alpha \geq 2$. Тоді цільова функція F_σ виглядає так:

$$F_\sigma = \sigma_H \rightarrow \min. \quad (1)$$

Розрахунок контактних напружень σ_H , МПа, виконуємо на основі загальновідомої формули Г. Герца для випадку початкового дотику пружних тіл по лінії. Додатково врахуємо, що досліджуються передачі із коефіцієнтом торцевого перекриття $\varepsilon_\alpha \geq 2$. Це означає, що у будь який момент часу має місце двопарне зачеплення, тобто теоретична сумарна довжина контактних ліній завжди не менш, ніж $2 b_w$, де b_w – робоча ширина зубчастого вінця. Тоді маємо:

$$\sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{F_n K_{H\alpha} E_H}{b_w \rho_H [\varepsilon_\alpha]}}, \quad (2)$$

де F_n – нормальне зусилля у зачепленні; $K_{H\alpha}$ – коефіцієнт, що враховує

розподілення навантаження між зубцями (зазвичай, згідно стандартних методик [6, 7], для прямозубцевих передач приймають $K_{H\alpha} = 1$, але при $\varepsilon_\alpha \geq 2$ виникає необхідність врахувати нерівномірність навантаження двох пар зубців); $\rho_H = (\rho_1 \cdot \rho_2) / (\rho_2 \pm \rho_1)$ – приведений радіус кривизни (ρ_{w1}, ρ_{w2} – радіуси кривизни профілів зубців шестерні та колеса в полюсі зачеплення.); $E_H = 2(E_1 \cdot E_2) / (E_1 + E_2)$ – приведений модуль пружності матеріалу (E_1, E_2 – модулі пружності матеріалів шестерні та колеса.); $[\varepsilon_\alpha]$ – ціла частина ε_α .

Радіуси кривизни ρ_{w1}, ρ_{w2} визначається за залежністю [1],

$$\rho_{w1,2} = 0,5d_{w1,2} \sin(\alpha_w), \quad (3)$$

де α_w – кут зачеплення в полюсі; $d_{w1,2}$ – початкові діаметри шестерні та колеса,

$$d_{w1,2} = mz_{1,2} \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w}, \quad (4)$$

де m – модуль зачеплення; $z_{1,2}$ – числа зубців шестерні та колеса.

Кут зачеплення в полюсі α_w визначається з основного рівняння евольвентного зачеплення [1],

$$\text{inv } \alpha_w = 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \text{tg } \alpha + \text{inv } \alpha, \quad (5)$$

де $x_{1,2}$ – коефіцієнти зміщення вихідного контуру шестерні та колеса; α – кут профілю вихідного контуру (рис. 1).

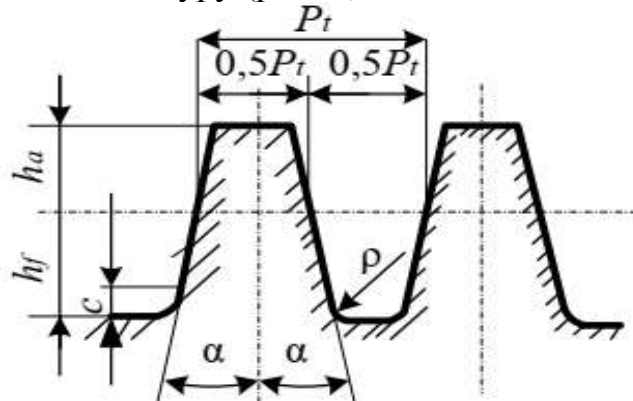


Рис. 1. Схема вихідного контуру

Коефіцієнт торцевого перекриття ε_α визначається за залежністю [1]:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{z_1 (\text{tg } \alpha_{a1} - \text{tg } \alpha_w) + z_2 (\text{tg } \alpha_{a2} - \text{tg } \alpha_w)}{2\pi}, \quad (6)$$

де $\alpha_{a1,2}$ – кути профілю на вершинах зубців шестерні та колеса,

$$\alpha_{a1,2} = \arccos \left(\frac{d_{b1,2}}{d_{a1,2}} \right), \quad (7)$$

де $d_{b1,2}, d_{a1,2}$ – основні діаметри і діаметри вершин зубців шестерні та колеса,

$$d_{b1,2} = m z_{1,2} \cos \alpha; \quad (8)$$

$$d_{a1,2} = mz_{1,2} + 2(h_{a1,2}^* + x_{1,2} - \Delta y)m, \quad (9)$$

де $h_{a1,2}^*$ – коефіцієнти висоти головки зубців вихідних контурів шестерні та колеса (рис. 1); Δy – коефіцієнт зрівняльного зміщення,

$$\Delta y = x_1 + x_2 - 0,5(z_1 + z_2) \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_w} - 1 \right). \quad (10)$$

На відміну від традиційних евольвентних передач зі стандартним вихідним контуром, де прийняті однакові коефіцієнти висоти головки зубців шестерні та колеса ($h_{a1}^* = h_{a2}^* = h_a^*$), будемо використовувати так зване різне контурне зачеплення, для якого $h_{a1}^* \neq h_{a2}^*$. Це дає змогу, як було обґрунтовано у роботі [4], досягнути більших значень ε_α .

Таким чином, рівняння (1)...(10) складають математичну модель оптимізації евольвентних циліндричних прямозубцевих передач за критерієм мінімізації контактних напружень у зачепленні, при забезпеченні коефіцієнта торцевого перекриття $\varepsilon_\alpha \geq 2$.

Визначення змінних проектування. До геометричних параметрів евольвентного зачеплення, які безпосередньо впливають на величину коефіцієнта торцевого перекриття ε_α [1], відносяться: висоти зубців шестерні та колеса h_1 та h_2 (або коефіцієнти висоти головок зубців $h_{a1,2}^*$); кут профілю вихідного контуру α ; сумарний коефіцієнт зміщення вихідного контуру $x_\Sigma = x_1 + x_2$.

Прийmemo, що оптимальному проектуванню підлягають зубчасті передачі із наперед призначеними геометричними характеристиками. А саме, відомі модуль зачеплення m ; числа зубців шестерні та колеса $z_{1,2}$; міжосьова відстань передачі a_w ; робоча ширина зубчастого вінця b_w . У цьому випадку ми маємо однозначну величину сумарного коефіцієнта зміщення вихідного контуру x_Σ . Тому зручно аналізувати вплив на величину ε_α тільки одного коефіцієнта зміщення, наприклад, x_1 .

Тоді обираємо у якості змінних проектування для нашої цільової функції (1) чотири наступні параметри:

– коефіцієнти висоти головки зубців вихідних контурів шестерні та колеса h_{a1}^* , h_{a2}^* ;

– кут профілю вихідного контуру α ;

– коефіцієнт зміщення вихідного контуру шестерні x_1 .

Числові та функціональні обмеження на змінні проектування:

– основне функціональне обмеження на мінімальну величину коефіцієнта торцевого перекриття: $\varepsilon_\alpha \geq 2$;

– коефіцієнти висоти головки зубців вихідного контуру шестерні та колеса h_{a1}^* , h_{a2}^* обмежується відповідними числовими діапазонами: $h_{a1\min}^* \leq h_{a1}^* \leq h_{a1\max}^*$; $h_{a2\min}^* \leq h_{a2}^* \leq h_{a2\max}^*$;

– кут профілю вихідного контуру α обмежується числовим діапазоном $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$, де α_{\min} визначається із умови відсутності заклинювання передачі, $\alpha_{\min} \geq (1,1 \dots 1,2) \operatorname{tg} f$ (f – коефіцієнт тертя ковзання у зачепленні); α_{\max} призначається у межах $22 \dots 25^\circ$, виходячи із досвіду

проектування евольвентних зачеплень [1];

– коефіцієнти зміщення вихідного контуру x_1, x_2 шестерні та колеса обмежуються відповідними числовими діапазонами: $x_{1\min} \leq x_1 \leq x_{1\max}$; $x_{2\min} \leq x_2 \leq x_{2\max}$, де $x_{1\min}, x_{2\min}$ визначаються із умови відсутності підрізання ніжок зубців; $x_{1\max}, x_{2\max}$ визначаються із умови відсутності загострення вершин зубців;

– умова відсутності підрізання ніжок зубців шестерні та колеса;

– умова відсутності загострення вершин зубців шестерні та колеса;

– умова відсутності інтерференції у зачепленні;

– умова забезпечення міцності зубців шестерні та колеса при згині:

$\sigma_{F1,2} \leq \sigma_{FP1,2}$, де $\sigma_{F1,2}, \sigma_{FP1,2}$ – відповідно розрахункові та допустимі напруження при згині.

Обрання методу розв'язання оптимізаційної задачі. Для розв'язання вищевикладеної задачі було обрано метод зондування простору параметрів, де у якості пробних точок в одиничному багатомірному кубі використовуються точки ЛПт-послідовності [8]. До переваг цього метода можна віднести велику максимальну кількість змінних проектування – 51, а також достатньо велику максимальну кількість пробних точок – 2^{20} .

Розв'язання виконується наступним чином. Спочатку ЛПт методом генеруються координати $q_{i,j}$, які приймають значення від 0 до 1, а потім розраховуються значення змінних проектування $\theta_{i,j}$ з урахуванням числових обмежень,

$$\theta_{i,j} = a_j + (b_j - a_j)q_{i,j}, \quad (11)$$

де $i = 1, 2, \dots, 2^{20}$ – номер пробної точки; $j = 1, 2, \dots, n$ – порядковий номер змінної проектування (n – кількість змінних проектування, у нашому випадку $n = 4$); a_j, b_j – відповідно мінімальні та максимальні значення обмежень на змінні проектування.

Після цього проводять перевірку функціональних обмежень, а потім у кожній пробній i -й точці, що пройшла усі перевірки, розраховують значення цільової функції $F_{\sigma_i}(\theta_{i,1}, \theta_{i,2}, \theta_{i,3}, \theta_{i,4})$; у нашому конкретному випадку це $F_{\sigma_i}(h_{a1i}^*, h_{a2i}^*, \alpha_i, x_{1i})$. З цих значень складають масив можливих варіантів розв'язку. Пошук мінімального значення цільової функції здійснюється шляхом сортування цього масиву.

Висновки. Побудовано цільову функцію та математичну модель оптимізації HCR-зачеплень з коефіцієнтом торцевого перекриття $\varepsilon_\alpha \geq 2$ за критерієм мінімізації контактних напружень. Визначені змінні проектування, сформовано систему числових та функціональних обмежень. Для розв'язання задачі обрано метод зондування простору параметрів, де у якості пробних точок в одиничному багатомірному кубі використовуються точки ЛПт-послідовності. У подальших дослідженнях планується: розробити прикладні методики та алгоритми розв'язання задачі; провести перевірочні розрахунки з метою оцінки отриманих теоретичних результатів; запропонувати варіанти HCR-зачеплень із

коефіцієнтом торцевого перекриття $\varepsilon_\alpha \geq 2$, що забезпечують підвищену навантажувальну здатність.

Література

1. Dudley's Handbook of Practical Gear Design and Manufacture. Edited by Stephen P. Radzevich. CRC Pres, 2022. 1144 p.
2. Chanho Choi, Hyoungjong Ahna, Young-jun Park, Geun-ho Leec, Su-chul Kim. Influence of gear tooth addendum and dedendum on the helical gear optimization considering mass, efficiency, and transmission error. *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 166, December 2021, no. of article 104476. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0094114X21002342> (accessed 30.05.2022).
3. Rameshkumar M., Sivakumar P., Sundaresh S. and Gopinath K.. Load Sharing Analysis of High-Contact-Ratio Spur Gears in Military Tracked Vehicle Applications. *Gear Technology*, July 2010, pp. 43–50.
4. Milan Rackov. *Optimization of HCR Gearing Geometry from Scuffing Point of View*. PhD Thesis. Bratislava, 2014. 103 p.
5. Бунаков Ю.Н., Устиненко А.В. Выбор рационального коэффициента высоты головки зуба. *Теория механизмов и машин*. 1988, Вып. 44, С. 7–9.
6. ГОСТ 21354-87. Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления. Расчет на прочность. Москва: изд-во стандартов, 1989. 76 с.
7. ISO 6336-1:2019. Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors. 2019.
8. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. Москва: Наука, 1981. 110 с.

A MATHEMATICAL MODEL OF OPTIMIZATION FOR GEARS WITH INCREASED CONTACT RATIO

Stanislav Cherelev, Oleksandr Ustynenko, Oleksiy Bondarenko,
Roman Protasov, Sergij Andrienko

Reducing the mass and dimensions of gears is an actual task of modern mechanical engineering. One of the perspective ways to solve for involute spur gears it is the use of gearing with an increased working tooth depth and profile contact ratio $\varepsilon_\alpha \geq 2$. The study is devoted to the development of mathematical optimization model for such gears. Optimality criteria is formulated as follows: the contact stresses in the pitch point must take a minimum value when all constructive, geometric, kinematic, and technological constraints are met, first, when the profile contact ratio $\varepsilon_\alpha \geq 2$ is ensured. The equations that make up the mathematical optimization model are written. Variables planning are defined. These are addendum coefficients of the basic racks tooth for pinion and wheel h_{a1}^ , h_{a2}^* ; profile angle of the basic rack α ; addendum modification coefficient of the pinion x_1 . Formed a system of constraints for the variables planning: the*

main functional constraint of the minimum value of the profile contact ratio: $\varepsilon_{\alpha} \geq 2$; constraint for the addendum coefficients of the basic racks tooth for pinion and wheel h_{a1}^* , h_{a2}^* ; constraint for profile angle of the basic rack α ; constraint for addendum modification coefficients x_1 , x_2 ; absence of the cutter interference for tooth dedendum; absence of the sharpening for tooth addendum; absence of the mesh interference; ensuring the bending strength of pinion and wheel teeth. A method for solving the problem of optimal design is chosen. The method of probing the space of design parameters was chosen from all the variety. The points of the LP τ -sequence are used as test points. The method allows you to operate with a significant number of parameters – up to 51, provides a sufficiently large number of evenly distributed test points – up to 2^{20} . In further studies, it is planned to develop of methods and algorithms for solving the problem. Also carry out test and verification calculations to confirm and evaluate the theoretical results.

Key words: gear, profile contact ratio, contact stress, optimization, objective function, variables planning, constraints of the variables planning.

References

1. *Dudley's Handbook of Practical Gear Design and Manufacture*. Edited by Stephen P. Radzevich. CRC Pres, 2022. 1144 p.
2. Chanho Choi, Hyoungjong Ahna, Young-jun Park, Geun-ho Leec, Su-chul Kim. Influence of gear tooth addendum and dedendum on the helical gear optimization considering mass, efficiency, and transmission error. *Mechanism and Machine Theory*. Vol. 166, December 2021, no. of article 104476. Available at: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0094114X21002342> (accessed 30.05.2022).
3. M. Rameshkumar, P. Sivakumar, S. Sundaresh and K. Gopinath. Load Sharing Analysis of High-Contact-Ratio Spur Gears in Military Tracked Vehicle Applications. *Gear Technology*, July 2010, pp. 43–50.
4. Milan Rackov. *Optimization of HCR Gearing Geometry from Scuffing Point of View*. PhD Thesis. Bratislava, 2014. 103 p.
5. Bunakov Ju.N., Ustinenko A.V. (1988) The choice of a rational addendum factor. *Teorija mehanizmov i mashin*. 44, 7–9 [in Russian].
6. *GOST 21354-87. (1989) Cylindrical evolvent gears of external engagment. Strength calculation*. Moscow, Standarts Publ. [in Russian].
7. *ISO 6336-1:2019. (2019) Calculation of load capacity of spur and helical gears – Part 1: Basic principles, introduction and general influence factors*.
8. Sobol' I.M., Statnikov R.B. (1981) *The choice of optimal parameters in problems with many criteria*. Moscow: Nauka Publ. [in Russian].