УДК 515.2

НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ ФОРМУВАННЯ ДИСКРЕТНИХ ОБРАЗІВ СТАТИКО-ГЕОМЕТРИЧНИМ МЕТОДОМ

Ботвіновська С.І., к.т.н.*
Київський національний університет будівництва і архітектури
Тел. (044) 241-55-47

***Анотація* – пропонується два підходи організації ітераційних процесів для розв'язання нелінійних задач при формуванні дискретних образів статико-геометричним методом. Розглянуто приклади, які демонструють використання цих принципів та можливість проведення складного аналізу залежності похибки від числа ітерацій. Намічено шляхи поєднання цих принципів, що дозволить отримати ціленаправлений результат формування дискретного образу з довільною допустимою похибкою та оптимізувати сумарне числа ітерацій.**

***Ключові слова* – ітераційний процес, нелінійні системи рівнянь, формоутворююче навантаження, дискретні образи, оптимізація ітераційного процесу.**

Постановка проблеми. Розв'язання нелінійних систем рівноваги вузлів при формуванні дискретних образів статико-геометричним методом (СГМ) потребує правильної організації ітераційних процесів. Це дозволить отримати ціленаправлений результат з довільною допустимою похибкою.

СГМ дозволяє розв'язувати найрізноманітніші задачі моделювання та формоутворення дискретних образів під дією зовнішніх формоутворюючих зусиль, які можуть відповідати реальним фізичним явищам.

Всі задачі умовно можна розділити на дві групи. У першу – будуть входити задачі, в яких зовнішнє формоутворююче навантаження не залежить від координат вузлів дискретного образу. В цьому випадку, зовнішні зусилля задаються як дискретна функція від номерів вузлів. Прикладом буде слугувати формування дискретного каркаса поверхні безмоментного покриття на заданій в плані правильній сітці, де зовнішні зусилля розподіляються рівномірно між вузлами сітки у плані.

В цьому випадку, система рівнянь рівноваги вузлів буде складатись з лінійних рівнянь. Результат розв'язання цієї системи

* Науковий консультант: д.т.н., професор Ковальов С.М.

дозволить визначити абсциси, ординати та аплікати всіх вузлів сітки.

У другу – входити задачі, в яких зовнішні формоутворюючі зусилля будуть залежати від координат ряду суміжних вузлів дискретного образу, що формується СГМ. Оскільки ці координати є невідомими, то рівняння рівноваги вузлів стають нелінійними і виникає задача розв'язання системи нелінійних рівнянь. В процесі розв'язання такого типу задач весь час необхідно уточнювати величину та напрямок зовнішнього формоутворюючого навантаження.

Аналіз останніх досліджень. В роботі [1] розроблено спосіб формоутворення дискретного каркасу поверхні безмоментного покриття постійної товщини під дією власної ваги, де однакові рівномірні зусилля зовнішнього навантаження розподілено не в плані, а по поверхні. В результаті цього, між вузлами правильної сітки у плані розподіл навантаження буде нерівномірним, і зовнішні зусилля будуть залежати від координат вузлів сітки. Саме ця задача може слугувати прикладом задач другого типу.

Іншим прикладом може слугувати формоутворення поверхонь під впливом внутрішнього надлишкового тиску, по типу «роздування» поверхні. У цьому випадку зовнішні зусилля повинні бути нормальними до поверхні, а оскільки поверхня що моделюється не відома, то зусилля будуть залежати від координат невідомих вузлів. На цьому принципі запропоновано використання СГМ для формоутворення біооболонок у роботах [2, 3].

Формулювання цілей статті. Окреслити основні шляхи оптимізації сумарного числа ітерацій для формування дискретних каркасів ліній або поверхонь під дією функціонального формоутворюючого навантаження СГМ.

Основна частина. Існує багато відомих способів розв'язання систем нелінійних рівнянь, що спираються на метод послідовних наближень. Математична постановка задачі формоутворення дискретного образу, коли зусилля зовнішнього навантаження є нормальними до модельованої поверхні, приводить до не лінійності системи рівнянь рівноваги вузлів. Ця система може бути розв'язана методом послідовних наближень за допомогою системи Maple. В результаті чого можна отримати безліч рішень. Але при цьому, необхідно задати таке перше наближення, яке буде дуже близьким до бажаного результату. Виходячи з цього, необхідно знайти спосіб, спрямований на потрібне рішення.

В цьому випадку може допомогти СГМ, математичний апарат якого повністю повторює аналогічний апарат методу скінчених різниць, але має більшу наочність процесу формоутворення дискретного образу. СГМ дозволить вибрати напрямок до якого необхідно прагнути для отримання результату. Задавши деяке перше наближення дискретного образу, призначають зовнішнє навантаження, певним чином розподілене між вузлами. Це навантаження повинно переміщати вузли у необхідному напрямку і формувати каркас дискретного образу.

Перше наближення дискретного образу може значно відрізнятись від бажаного результату, у зв'язку з чим неможливо відразу задати правильне навантаження. Тому параметри зовнішнього навантаження необхідно уточнювати після кожного кроку ітерації.

Виникає проблема збіжності ітераційного процесу (процес може розходитись). Ця збіжність залежить від того, наскільки вдалим було перше наближення, або наскільки воно було близьким до бажаного результату. Можна намітити два підходи для забезпечення збіжності ітераційного процесу.

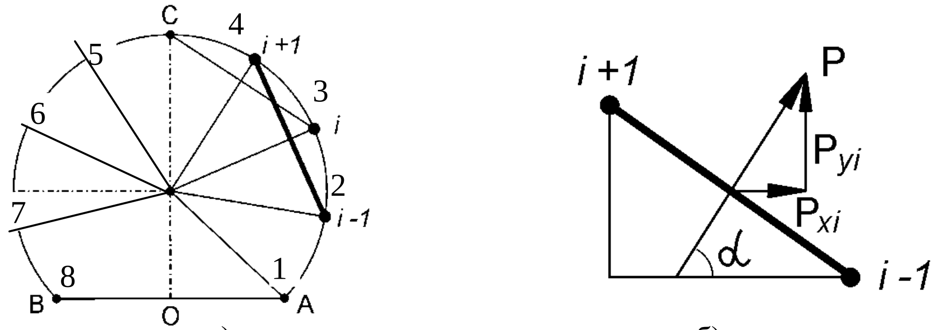
Перший підхід – це вибір достатньо близького до бажаного результату першого наближення. Тоді, виникає необхідність у вивченні залежності збіжності ітераційного процесу від першого наближення.

Другий підхід – це моделювання поступової зміни форми дискретного образу за рахунок поступового нарощування зовнішнього навантаження у процесі моделювання фізичного процесу послідовного формоутворення дискретної лінії або поверхні. Такий підхід буде супроводжуватись складним ітераційним процесом. На збіжність процесу суттєво буде впливати число ітерацій (завжди можна підібрати таке число ітерацій, коли процес почне збігатись).

Виникає необхідність у вивченні залежності ітераційного процесу від числа ітерацій. Найкращим шляхом є той, який дозволяє отримати результат з допустимою похибкою при найменшому числі ітерацій. Цього можна досягти об'єднавши обидва підходи, описані вище. Так, наприклад, отримавши дискретний образ за допомогою другого підходу, можна взяти його за достатньо близьке до бажаного (моделюємого) перше наближення і, уточнюючи його, використовуючи другий принцип, отримати необхідний результат. При цьому критерієм оцінки алгоритму розв'язання задачі буде найменше сумарне число ітерацій.

Описану вище ідею аналізу збіжності ітераційного процесу покажемо на найпростішому прикладі, де в якості тестової кривої було використано дугу кола. Моделювання кривої лінії та подальше дослідження збіжності ітераційного процесу при такому моделювання набагато простіше, ніж моделювання поверхні. Але, слід чекати, що ряд особливостей, які будуть притаманні процесу дискретного моделювання лінії, може бути перенесено на процес моделювання дискретного каркасу поверхні. Якщо враховувати, що поверхня формується за тими ж законами, що й лінія яка моделюється, а остання виступає як елемент каркасу поверхні.

Приклад. Нехай нерозтяжна нитка, яку закріплено в точках ***A*** і ***B*** (рис. 1, а), приймає форму дуги кола, що проходить через задану точку ***C*** під дією нормально-розподіленого рівномірного навантаження між вузлами ***1-8*** .



а) б)

Рис. 1. Схема моделювання дискретного образу дуги кола: а – топологічна схема дуги кола; б – умова рівноваги сил P, P_{xi}, P_{yi}.

Тоді, за СГМ рівновага довільного вузла нитки описується системою рівнянь:

$$X_{i-1} - 2X_i + X_{i+1} + \frac{kP(y_{i+1} - y_{i-1})}{\sqrt{(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2}} = 0;$$
$$\qquad (1)$$
$$Y_{i-1} - 2Y_i + Y_{i+1} + \frac{-kP(x_{i+1} - x_{i-1})}{\sqrt{(x_{i+1} - x_{i-1})^2 + (y_{i+1} - y_{i-1})^2}} = 0.$$

Як видно з (1), ця система рівнянь рівноваги вузлів нерозтяжної нитки є нелінійною, тому її рішення дуже скрутне. Застосовуючи метод послідовних наближень, організуємо ітераційний процес за двома описаними вище підходами. За перше наближення приймаємо вузли відрізка ***AB***, поступово уточнюючи зовнішнє навантаження kP_{xi}, kP_{yi} (рис. 1, б) за формулами.

$$kP_{xi} = kP\cos\propto_i = \frac{kP(y_{i+1}-y_{i-1})}{\sqrt{(x_{i+1}-x_{i-1})^2+(y_{i+1}-y_{i-1})^2}};$$
$$\qquad (2)$$
$$kP_{yi} = kP\sin\propto_i = \frac{-kP(x_{i+1}-x_{i-1})}{\sqrt{(x_{i+1}-x_{i-1})^2+(y_{i+1}-y_{i-1})^2}},$$

де kP_{xi}, kP_{yi} – складові формоутворюючого навантаження;
x_i, y_i – координати вузлів дискретної моделі.

Форма дискретно визначеного контуру дуги кола, яке формується під дією зусиль, прикладених до вузлів, залежить від величин цих зусиль.

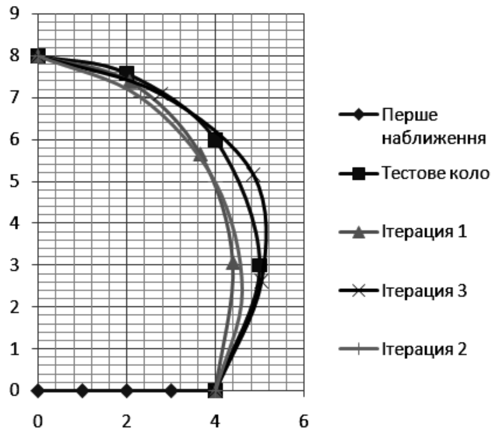


Рис. 2. Приклад моделювання дискретного образу за першим підходом.

За першим підходом зовнішнє навантаження на довільний вузол визначається з умови проходження дискретно визначеної дуги кола через точку С, з координатами (0, 8) (рис. 2). Видно, що при співвідношенні $\frac{OC}{OA} = \frac{8}{4} = 2$ ітераційний процес не збігається, оскільки похибка у визначенні координат вузлів з кожним кроком ітерацій збільшується.

На рис. 3,а показано формування дискретного каркасу дуги кола за другим підходом, де число ітерацій при поступовому нарощуванні формоутворюючого навантаження (рис. 3, в) дорівнює 8.

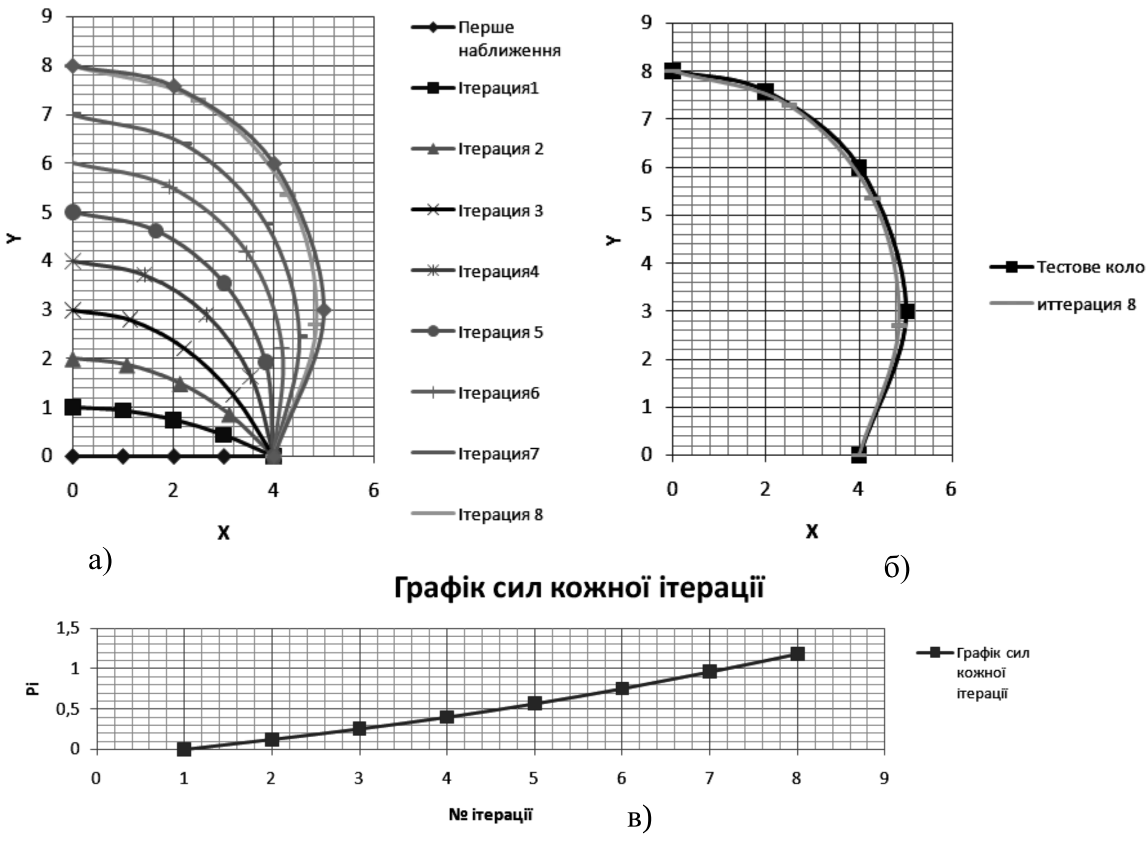


Рис. 3. Експериментальні результати побудови дискретного образу за 8 ітерацій: а – змодельовані дискретні криві лінії кожної ітерації; б – дискретна крива лінія останньої ітерації та тестове коло; в – графік нарощування зовнішнього навантаження.

Наприкінці ітераційного процесу отримано дискретний каркас дуги кола з похибкою, яка дорівнює δ_1 і визначено як середньоквадратичну розбіжність з тестовим результатом. Для зменшення похибки, отриману в останній ітерації дискретно визначену криву лінію приймаємо за перше наближення для подальшого ітераційного процесу, який організовуємо за першим підходом. Згідно з тестовим прикладом (рис. 3, б) для отримання кінцевого результату, коли допустима похибка не буде перевищувати 1%, необхідно провести п’ять ітерацій.

Висновки. Досліджено два підходи організації ітераційних процесів для розв’язання нелінійних систем рівноваги вузлів при формування дискретних образів СГМ. Поєднання цих підходів дозволяє отримати ціленаправлений результат з довільною допустимою похибкою.

Подальші дослідження планується проводити як у напрямі оптимізації сумарного числа ітерацій у комбінованому ітераційному процесі, так і в напрямі узагальнення отриманих результатів для формування дискретних каркасів поверхонь під дією функціонально - розподіленого навантаження на вузли сітки, параметри якого залежать від координат вузлів.

Властивості формоутворення дискретного каркасу безмоментної поверхні можуть бути одержані в результаті узагальнення відповідних властивостей формоутворення дискретної моделі лінії.

Література

1. *Даниловская Н.А.* Дискретное моделирование поверхностей сводов-оболочек / Н.А. Даниловская// Дис... канд. техн. наук: 05.01.01. – К.: КИСИ, 1986. – 144 с.
2. *Логачов М.Я.* Керування формою поверхонь оболонок, що формуються під впливом нормального навантаження / М.Я. Логачов // Дис... канд. техн. наук: 05.01.01. – К.: КИСИ, 1995. – 148 с.
3. *Кащенко А.В.* Моделирование поверхностей биооболочек с учетом физических условий их образования / А.В. Кащенко, В.А. Вязанкин // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Вып. 40. – К.: КИСИ, 1985. – С. 46-48.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ФОРМИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ОБРАЗОВ СТАТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

С.И. Ботвиновская

***Аннотация* – рассматриваются два подхода организации итерационных процессов для решения нелинейных задач при формировании дискретных каркасов поверхностей с помощью статико-геометрического метода. Приведены примеры, которые демонстрируют использование этих принципов и возможность проведения сложного анализа в зависимости от погрешности и числа итераций. Намечены пути комбинирования этих подходов для оптимизации суммарного числа итераций и получения целенаправленного результата по формированию дискретного образа, с произвольной допустимой погрешностью.**

NONLINEAR PROBLEMS OF FORMATION OF DISCRETE FRAMES BY THE STATIC-GEOMETRIC METHOD

S. Botvinovska

Summary

Two approaches are examined in the article the realizations of iterative processes for solving nonlinear problems at the design of discrete frameworks of surfaces and models of lines using static-geometric method of prof. Kovaleva S. Examples that demonstrate the use of these principles and possibility of realization of difficult analysis depending on an error and number of iterations are made. The ways of combination of these approaches are set for optimization of total number of iterations and for the receipt of final result on forming of discrete character, with an arbitrary permissible error.