

УДК 514.18

## **ПРОЕКТУВАННЯ КОНІЧНОЇ КРИВОЇ БІЦИЛІНДРОКОНІЧНОГО БАРАБАНУ ДЛЯ ШАХТНИХ ПІДЙОМНИХ УСТАНОВОК**

Захарова Т.М., аспірант\*

*Національний університет біоресурсів і природокористування  
України (Київ)*

Тел. (044) 527-82-26

**Анотація** – отримано просторову криву на конічній поверхні біциліндроконічного барабану для шахтних підйомних установок, яка забезпечує необхідну щільність намотування канату на барабан. Крива описана у функції натурального параметра, що дає змогу розрахувати довжину канату і з урахуванням цього визначити крутий момент у будь-якому положенні установки.

**Ключові слова** – біциліндроконічний барабан, конічна крива, евольвента кола, довжина дуги, натуральний параметр.

*Постановка проблеми.* Для підйому-спуску людей, устаткування, матеріалів, а також для підйому корисних копалин через вертикальні стволи шахт глибиною до 1000 м використовують біциліндроконічні шахтні підйомні установки [1]. Їх барабан складається з двох конічних та трьох циліндричних частин (рис. 1). Якщо вантажі у вигляді кабін знаходяться на однаковій висоті на кінцях намотаного на циліндричну частину канату, то моменти сили, які від них виникають є зрівноваженими. Однак ця рівновага швидко порушується при підйомі-спуску вантажів, оскільки суттєву роль відіграє вага канату. А це викликає значне коливання потужності електроприводу для установки.

*Аналіз останніх досліджень.* На рис. 1 показано два вантажі  $P_1$  і  $P_2$ , підвішені до тросів, який намотаний на циліндр великого діаметра (радіуса  $R$ ). При обертанні циліндра один вантаж опускається, а другий піднімається. При умові, що вага вантажів однакова і плече  $R$  незмінне, а також троси невагомі, круті моменти будуть зрівноважувати один одного. Однак через те, що трос має вагу, величина якої прямопропорційна його довжині, врівноважити моменти при роботі циліндричного барабана неможливо. Цього

---

\*Науковий керівник – д.т.н., професор Пилипака С.Ф.

можна досягнути тільки в той момент, коли вантажі знаходяться на однаковій висоті (рис. 1) і вага тросів від барабана до вантажів рівна. При повороті барабана на певний кут рівновага порушується, оскільки довжина троса біля одного вантажу зросла, а біля другого на таку ж величину зменшилася. Чим більший кут повороту барабана навколо його осі, тим більша різниця між крутними моментами і тим більшу потужність потрібно прикласти для приводу барабана.

Для того, щоб певною мірою зрівноважити крутний момент при роботі барабана використовуються конічні переходи. При підйомі вантажу його канат (трос) спочатку навивається на малий барабан, а в цей час канат вантажу, що опускається, звивається з великого барабану.

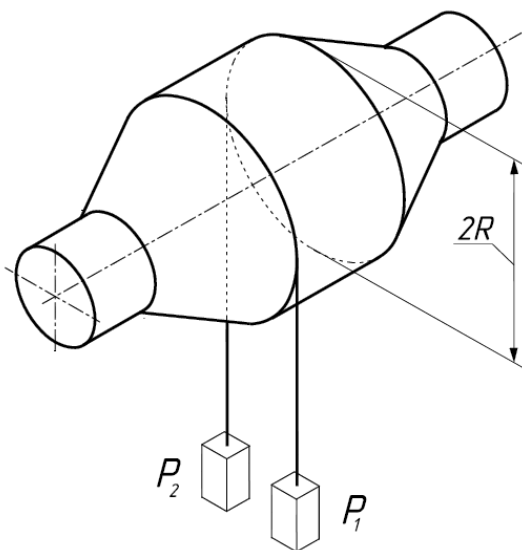


Рис. 1. Робочі поверхні біциліндроконічного барабана та схема його роботи по підйому і опусканню вантажів.

Не доходячи до середини стволу, канат вантажу, що піднімається починає намотуватися по конічній спіралі. При цьому зменшується загальна вага за рахунок зменшення довжини троса і одночасно зростає величина плеча, що певним чином дозволяє зрівноважити крутний момент. В цілому відбувається часткове зрівноважування зростаючої різниці ваги канатів.

Серед кривих у функції натурального параметра на поверхні конуса [2] є спіралеподібні криві, однак відстані між сусідніми витками вздовж твірних конуса є надто нерівномірними. Через це виникає задача знаходження конічної кривої, яка відповідала б поставленим вимогам.

*Формулювання цілей статті.* Знайти криву на поверхні конуса, яку можна було б з необхідною щільністю рівномірно намотати в канавки на поверхню конуса і щоб вона описувалася у функції довжини дуги.

*Основна частина.* Поставлена задача може бути розв'язана при згинанні плоскої заготовки з нанесеною спіраллю у конічну поверхню таким чином, щоб початок координат плоскої заготовки перейшов у вершину конуса.

Плоска спіраль, у якої відстань між сусідніми витками в радіальному напрямі є однаковою, відома. Це спіраль Архімеда. Однак її параметричні рівняння не можна записати у функції натурального параметра. Існує інша спіраль, подібна за вказаними

властивостями до спіралі Архімеда. Це евольвента кола (рис. 2). При утворенні евольвенти кола точка в системі тригранника Френе теж рухається за лінійним законом від центра, однак траєкторія цього руху зміщена на сталу  $a$  від центра  $O$  кола (рис. 2,б). Отже, чим менша стала  $a$ , тим більше евольвента кола подібна до спіралі Архімеда. Але якщо спіраль Архімеда не має натурального рівняння, то евольвента кола має натуральне і параметричні рівняння у функції довжини дуги.

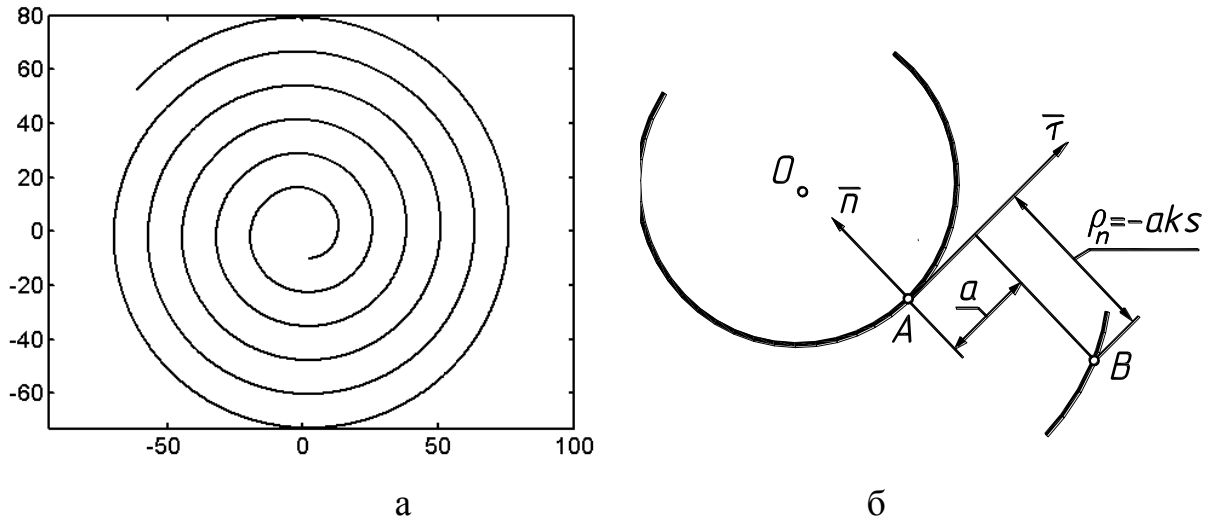


Рис. 2. Евольвента кола та схема її утворення:  
а) спіраль; б) схема утворення спіралі за допомогою тригранника Френе.

Запишемо параметричні рівняння конуса:

$$\begin{aligned} X &= u \cos \beta \cos v; \\ Y &= u \cos \beta \sin v; \\ Z &= u \sin \beta, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\beta$  – кут нахилу твірних конуса до горизонтальної площини – стала величина;  $u$ ,  $v$  – незалежні змінні поверхні, причому  $u$  – довжина прямолінійної твірної конуса,  $v$  – кут повороту точки поверхні навколо осі конуса.

Знайдемо частинні похідні і лінійний елемент (першу квадратичну форму) поверхні (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= \cos \beta \cos v; & \frac{\partial Y}{\partial u} &= \cos \beta \sin v; & \frac{\partial Z}{\partial u} &= \sin \beta; \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= -u \cos \beta \sin v; & \frac{\partial Y}{\partial v} &= u \cos \beta \cos v; & \frac{\partial Z}{\partial v} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
E &= \left( \frac{\partial X}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial u} \right)^2 = 1; \\
G &= \left( \frac{\partial X}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial Y}{\partial v} \right)^2 + \left( \frac{\partial Z}{\partial v} \right)^2 = u^2 \cos^2 \beta; \\
F &= \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial Z}{\partial v} = 0; \\
dS^2 &= du^2 + u^2 \cos^2 \beta dv^2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Якщо задати лінію на поверхні (1), встановивши певну залежність між внутрішніми координатами у вигляді  $u=u(v)$ ,  $v=v(u)$  або ж через проміжну змінну (наприклад,  $s - u=u(s)$ ,  $v=v(s)$ ), то на поверхні конуса (1) буде описана лінія. Це ж саме внутрішнє рівняння задасть відповідну лінію на розгортці, якщо відомі параметричні рівняння розгортки, які знаходять на основі незмінності довжин координатних ліній та кутів між ними, тобто на основі незмінності першої квадратичної форми для самої поверхні і її розгортки. Наприклад, в роботі [3] отримано параметричні рівняння розгортки конуса:

$$\begin{aligned}
X_{\delta} &= u \cos \beta \cos(v \cos \beta); \\
Y_{\delta} &= u \cos \beta \sin(v \cos \beta).
\end{aligned} \tag{4}$$

Неважко пересвідчитися, що коефіцієнти першої квадратичної форми розгортки (4) і сама перша квадратична форма такі ж самі, як і вирази (3), отримані для конуса. Отже, підстановка певного внутрішнього рівняння у параметричні рівняння (1) і (4) дасть певну лінію як на конусі (1), так і на його розгортці (4). Наша задача полягає в наступному: знайти внутрішнє рівняння евольвенти кола на розгортці конуса, оскільки його підстановка в (1) дасть відповідну просторову криву на самому конусі.

Параметричні рівняння евольвенти кола радіуса  $a$  у функції довжини дуги  $s$  мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
x &= a \cos \sqrt{\frac{2s}{a}} + \sqrt{2as} \sin \sqrt{\frac{2s}{a}}; \\
y &= a \sin \sqrt{\frac{2s}{a}} - \sqrt{2as} \cos \sqrt{\frac{2s}{a}}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Для того, щоб знайти внутрішнє рівняння евольвенти кола на розгортці конуса у вигляді  $u=u(s)$ ,  $v=v(s)$ , прирівняємо між собою рівняння (4) і (5). Отримаємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} u \cos \beta \cos(v \cos \beta) = a \cos \sqrt{\frac{2s}{a}} + \sqrt{2as} \sin \sqrt{\frac{2s}{a}}; \\ u \cos \beta \sin(v \cos \beta) = a \sin \sqrt{\frac{2s}{a}} - \sqrt{2as} \cos \sqrt{\frac{2s}{a}}. \end{cases} \quad (6)$$

Розв'язавши систему (6) відносно  $u$  і  $v$ , отримаємо:

$$u = \sqrt{a(a+2s)}; \\ v = \frac{1}{\cos \beta} \operatorname{Arctg} \left[ \frac{(a+2s) \sin(2\sqrt{2s/a}) - 2\sqrt{2as}}{a-2s + (a+2s) \cos(2\sqrt{2s/a})} \right]. \quad (7)$$

При підстановці виразів (7) у рівняння конуса (1) отримаємо параметричні рівняння просторової кривої на його поверхні у функції

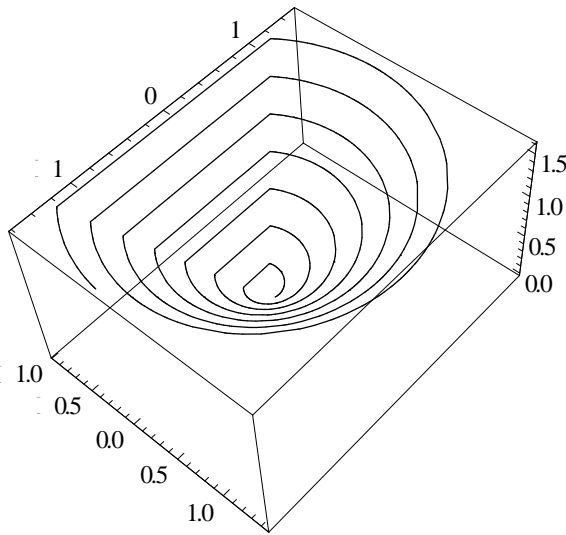


Рис. 3. Крива, задана внутрішніми рівняннями (6), побудована на поверхні конуса (1).

натурального параметра  $s$ . Однак її побудова не дала очікуваного результату (рис. 3), оскільки крива має прямолінійні ділянки. Це пояснюється тим, що евольвента кола (5) своїми витками займає всю площу навколо початку координат, тоді як розгортка конуса (4) представляє собою певний сектор з центральним кутом, величина якого залежить від кута  $\beta$ . Така невідповідність призводить до розривів кривої на поверхні конуса (рис. 3).

Щоб уникнути такої ситуації і побудувати на конусі плавну криву, поступимо наступним чином. Використаємо тільки першу залежність  $u=u(s)$  із отриманих залежностей (7), а другу залежність  $v=v(s)$  знайдемо. Для цього використаємо першу квадратичну форму (3), яка для кривої у функції натурального параметра приймає вигляд:

$$\left( \frac{du}{ds} \right)^2 + u^2 \cos^2 \beta \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 = 1. \quad (8)$$

Підставимо у (8) залежність  $u=u(s)$  із (7) та її похідну  $du/ds = a/(a+2s)$  і отримаємо диференціальне рівняння:

$$\frac{a^2}{a(a+2s)} + a(a+2s) \cos^2 \beta \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 = 1. \quad (9)$$

Отримане диференціальне рівняння (9) зводиться до інтегралу, який можна проінтегрувати. Таким чином отримуємо нову залежність  $v=v(s)$ :

$$v = \frac{1}{\cos \beta} \left( \sqrt{\frac{2s}{a}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2s}{a}} \right). \quad (10)$$

Підстановка (10) і першої залежності (7) в (1) дає параметричні рівняння конічної кривої у функції натурального параметра:

$$\begin{aligned} x &= \cos \beta \sqrt{a(a+2s)} \cos \left[ \frac{1}{\cos \beta} \left( \sqrt{\frac{2s}{a}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2s}{a}} \right) \right]; \\ y &= \cos \beta \sqrt{a(a+2s)} \sin \left[ \frac{1}{\cos \beta} \left( \sqrt{\frac{2s}{a}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2s}{a}} \right) \right]; \\ z &= \sin \beta \sqrt{a(a+2s)}. \end{aligned} \quad (11)$$

У кривої, побудованої за рівняннями (11), відсутні недоліки, які притаманні кривій, зображених на рис. 3. Крива має закономірний характер і відповідає тим вимогам, які були до неї поставлені. На рис. 4 побудовані криві на поверхні конуса з кутом нахилу його твірних  $\beta=60^\circ$  і різною щільністю витків, яка залежить від значення сталої  $a$ .

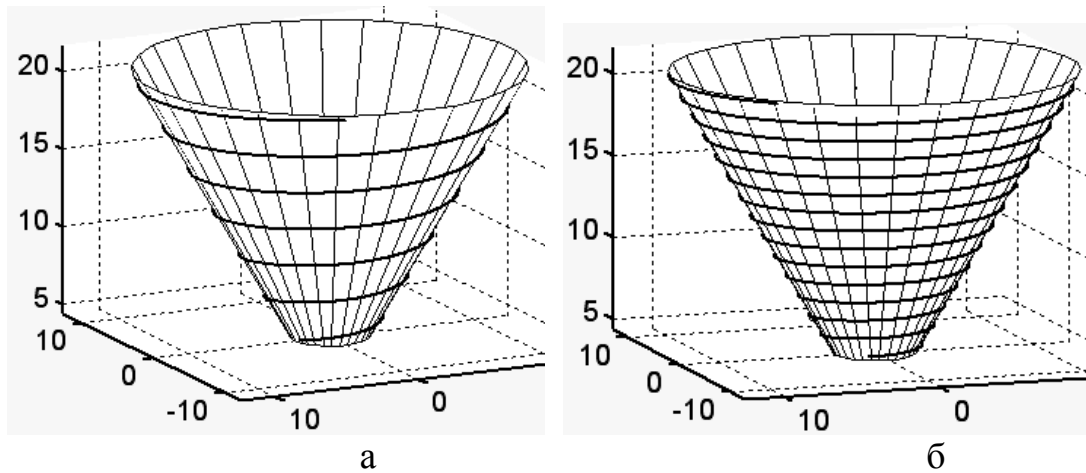


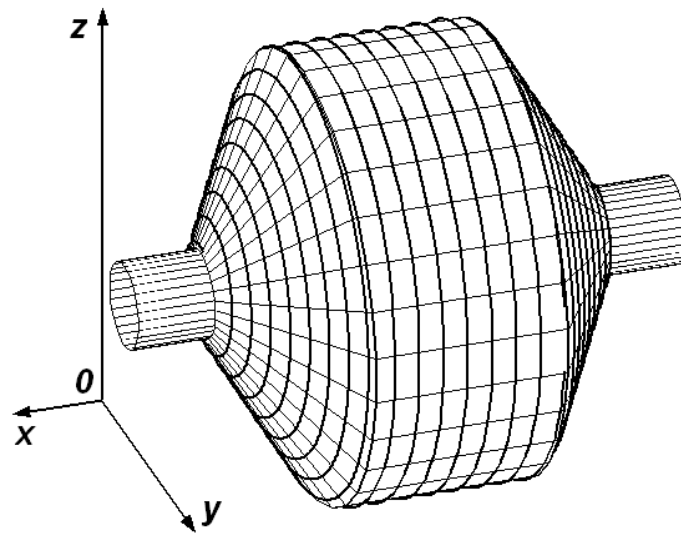
Рис. 4. Криві на поверхні конуса, побудовані за параметричними рівняннями (11) при  $\beta=60^\circ$ :

а)  $a=0,5$ ;

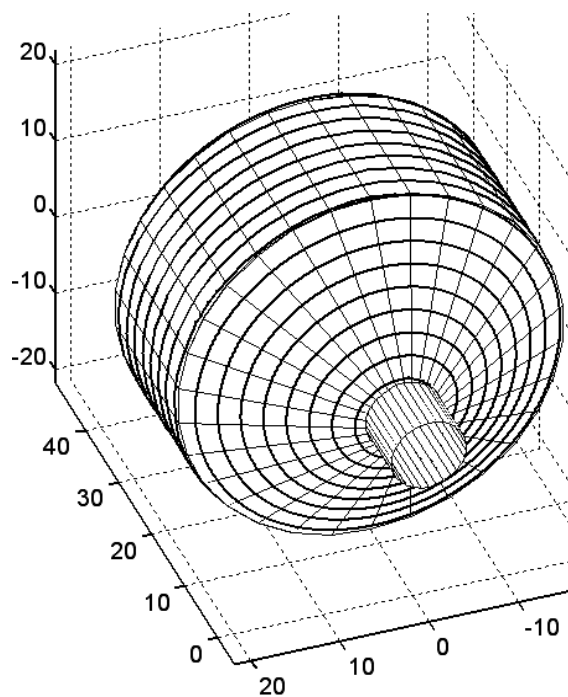
б)  $a=0,1$ .

Якщо два однакові конуси з однаковим напрямом навивки отриманої кривої з'єднати між собою так, щоб їх більші основи збіглися і кінці ліній теж, то точка, яка рухається по кривій одного конуса в сторону основи продовжить свій рух по кривій другого конуса, не змінюючи при цьому напрямку обертання навколо спільної осі конусів. Здійснюючи рух по першому конусу вона віддалялася від його осі, а при переході на другий конус буде наближатися. Якщо між

конусами розташувати циліндр із гвинтовою лінією, то ми отримаємо елементи біциліндроконічного барабана. На рис. 5,а барабан повернуто так, щоб було видно, як спіралеподібна крива на конусі плавно переходить у гвинтову лінію на середній циліндричній поверхні, а на рис. 5,б так, щоб було видно спіралеподібну криву на конічній поверхні.



а)



б)

Рис. 5. Біциліндроконічний барабан з лініями навивки каната на його робочих поверхнях:

- а) показано всі робочі поверхні барабана;
- б) показано конічну і циліндричну частини.

Припустимо, що біциліндроконічний барабан з горизонтальною віссю обертання, намотаним канатом і вантажами на його кінцях розташований так, як показано на рис. 1, тобто середня циліндрична частина повністю заповнена канатом і кінці каната звисають вниз на межі переходу на конус. Вантажі знаходяться на однаковій висоті (наприклад, на середині підйому), тому при їх однаковій вазі крутні моменти будуть врівноважені. Проте при відхиленні від цього положення з'являється різниця між крутними моментами, яка зростає прямопропорційно різниці відстані між вантажами при умові, що підйом-опускання здійснюється циліндричним барабаном. Однак у нашому варіанті (рис.1) при порушенні рівноваги канат вантажу, який опускається, починає змотуватися з конічної поверхні, а протилежний кінець – намотуватися на циліндричну поверхню. За рахунок того, що відстань від вертикального каната, що опускається, до осі обертання (плече) зменшується, різниця крутних моментів буде наростати повільніше.

*Висновки.* Отримана конічна спіраль відповідає двом головним вимогам: її параметричні рівняння записані у функції натурального параметра, а форма забезпечує необхідну щільність намотування на конічний барабан. Це дає змогу розрахувати довжину канату, який намотується або змотується з конічного барабану, і з урахуванням цього визначити крутний момент в будь-якому положенні біциліндроконічного пристрою. Для визначення крутного моменту потрібно знати силу ваги вантажу із канатом і плече, величина якого залежить від точки відриву канату від поверхні конуса. Вага канату прямопропорційна його довжині від причепленого вантажу до точки відриву. Окрім того, зміною кута нахилу твірних конуса до його основи і зміною щільності намотування можна розрахувати всі необхідні дані, зокрема довжину канату, намотаного на конічний барабан.

#### Література

1. Шахтный подъем: Научно-производственное издание / В.Р. Бежок, В.И. Дворников, И.Г. Манец, В.А. Пристром. – Донецк: ООО «Юго-Восток ЛТД», 2007. – 624 с.
2. *Пилипака С.Ф.* Конструювання кривих у функції натурального параметра на поверхнях обертання / С.Ф. Пилипака, Т.М. Захарова, Т.П. Федорина // Прикладна геометрія та інженерна



графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Вип.4. Т.55. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – С. 176 – 184.

3. *Пилипака С.Ф.* Проектирование транспортирующих органов сельхозмашин / С.Ф. Пилипака // «Повышение эффективности использования и надежности с.х. техники». – К.,1993. – С. 10 – 15.

## **ПРОЕКТИРОВАНИЕ БИЦИЛИНДРОКОНИЧЕСКОГО БАРАБАНА ДЛЯ ШАХТНЫХ ПОДЪЁМНЫХ УСТАНОВОК**

Т.Н. Захарова

*Аннотация* – получена пространственная кривая на конической поверхности бицилиндроконического барабана для шахтных подъёмных установок, которая обеспечивает необходимую плотность наматывания каната на барабан. Кривая описана в функции натурального параметра, что даёт возможность рассчитать длину каната и с учетом этого определить крутящий момент в любом положении установки.

## **DESIGNING OF THE BYCYLINDER-CONIC DRUM FOR MINE LIFTING UNITS**

T. Zakharova

### *Summary*

The spatial curve on conical surface of the bycylinder-conic drum for mine of lifting plant which provides the necessary density of winding the rope on the drum is obtained in the article. The curve is described in the function of the natural parameter. It lets you calculate the length of the rope and on this basis to determine the torque at any position settings.