

УДК 515.2

## ОПИС ТА ПОБУДОВА СПРЯЖЕНИХ ЦЕНТРОЇД НЕКРУГЛИХ ЗУБЧАСТИХ КОЛІС

Легета Я.П.

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»

Тел. (0312) 64-30-89

**Анотація** - розглянуто геометричне моделювання центроїд зубчастих коліс нетрадиційної форми на основі аналітичного опису засобами математичного пакету Maple.

**Ключові слова** – некруглі зубчасті колеса, центроїди, передавальна функція, параметричні рівняння.

*Постановка проблеми.* Для передачі руху зі змінним відношенням швидкостей у машинобудуванні використовуються некруглі зубчасті колеса. Крім того, у приладобудуванні некруглі зубчасті колеса використовуються для відтворення нелінійних функцій, у гідротехніці – для конструювання насосів, тощо [1]. У механізмі з некруглими зубчастими колесами залежність між кутами повороту ведучого й веденого коліс є нелінійною. Цікавим є те, що за допомогою простого механізму з некруглими колесами можна відтворити монотонну зростаючу функцію, похідна якої на проміжку відтворення є гладкою функцією з обмеженими додатними значеннями [2].

Провівши порівняльний аналіз кулачкового механізму й механізму з некруглими зубчастими колесами, що використовуються для відтворення функцій, можна дійти до висновку, що в умовах серійного виробництва коліс і кулачків точність відтворення функцій некруглими колесами вища, ніж кулачковим механізмом, і відтворені некруглими колесами немонотонні функції є більш складними. Тому актуальною буде задача аналітичного опису центроїд некруглих зубчастих коліс.

*Огляд останніх досліджень.* В роботах [1-3] наведено основні формули для розрахунку центроїд некруглих коліс – тобто кривих, що дотикаються одна до одної й перекочуються без ковзання при зачепленні зубчастих коліс. Крім того, центроїда ведучого колеса – це сукупність миттєвих центрів обертання в системі координат, жорстко пов'язаної з цим колесом.

Некруглі колеса звичайно задаються:

- кутом обертання ведучої шестерні  $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ ;

- кутом обертання веденої шестерні  $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ ;
- міжцентровою відстанню  $a = const$ .

Вважатимемо, що обертання ведучого колеса здійснюється з постійною (одиничною) швидкістю. Нехай кутові швидкості коліс визначаються формулами:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 = 1; \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 = \eta(t). \quad (1)$$

Некругла зубчаста передача призначена для перетворення обертового руху між деталями машин за заданою передавальною функцією  $\eta(t)$ , де  $t$  – час. Передавальна функція визначається як відношення похідних:

$$\eta(t) = \frac{d\varphi_2}{dt} / \frac{d\varphi_1}{dt}. \quad (2)$$

За допомогою передатної функції з виразу  $\eta = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1}{R_2}$  обчислюються миттєві радіуси передачі:

$$R_1(t) = \frac{a\eta(t)}{1+\eta(t)} \quad \text{і} \quad R_2(t) = \frac{a}{1+\eta(t)}.$$

Сума змінних радіусів  $R_1$  і  $R_2$  центроїд в точці дотику дорівнюватиме

$$R_1 + R_2 = a, \quad (3)$$

де  $a$  – постійна відстань між осями коліс.

Координати миттєвої точки контакту центроїд слід обчислювати за формулами:

$$r_1 = [R \cos \Phi_1, R \sin \Phi_1]; \quad r_2 = [R \cos \Phi_2, R \sin \Phi_2]. \quad (4)$$

де  $\Phi_1, \Phi_2$  – передавальні функції.

В роботах [4,5] розглядаються некруглі зубчасті колеса переважно еліптичної та «пелюсткової» форми. Але для впроваджень інтерес представляють зубчасті колеса нетрадиційної форми.

В роботі [6] розглянуто спосіб наближеного опису та побудови замкнутої кривої, заданої натуральним рівнянням, за умови представлення рядом Фур'є підінтегральної функції в її параметричному рівнянні.

*Формулювання цілей статті.* Використовуючи наведені формули розробити алгоритм геометричного моделювання центроїд зубчатих коліс нетрадиційної для літератури форми на основі їх аналітичного опису засобами математичного пакету Maple.

*Основна частина.* Алгоритм побудови центроїд некруглих зубчатих коліс наведемо з використанням синтаксису мови Maple.

Залежно від передавальної функції  $\Phi(t)$  визначаємо змінні радіуси центроїд в точці їх контакту:

$$R_1 := \frac{a \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)}; \quad R_2 := \frac{a}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)}. \quad (5)$$

Координати миттєвої точки контакту центроїд:

$$r_1 := \left[ \frac{a \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right) \cos(t)}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)}, \frac{a \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right) \sin(t)}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)} \right]; \quad (6)$$

$$r_2 := \left[ \frac{a \cos(\Phi)}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)}, \frac{a \sin(\Phi)}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)} \right].$$

Параметричне рівняння ведучого колеса визначаємо за формулами:

$$x1 := \frac{a \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right) \cos(t)}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)}; \quad y1 := \frac{a \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right) \sin(t)}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)}. \quad (7)$$

Тоді параметричне рівняння веденого колеса матиме вигляд:

$$x2 := a - \frac{1 \cdot a \cos(\Phi)}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)}; \quad y2 := \frac{a \sin(\Phi)}{1 + \left( \frac{d}{dt} \Phi(t) \right)}. \quad (8)$$

Побудувати зображення пари центроїд некруглих коліс за їх параметричними рівняннями (7) і (8) можна за допомогою операторів:

```
pic1 := plot([x1, y1, t=0..2*Pi], color = blue):
pic2 := plot([x2, y2, t=0..2*Pi], color = red):
```

Побудувати фазу сумісного обертання пари коліс, яка відповідає значенню параметра  $t$ , можна за допомогою послідовності операторів:

```
theta := t:
PIC1 := rotate(pic1, -theta, [0, 0]):
PIC2 := rotate(pic2, eval(Phi), [a, 0]):
display([PIC1, PIC2], c1, c2);
```

Далі наведемо приклади зображень, побудованих за допомогою складеної програми анімаційних кадрів пари центроїд зубчатих коліс нетрадиційної форми залежно від вигляду передавальної функції  $\Phi(t)$ . На рис. 1 наведено графік передавальної функції, заданої формулою

$$\Phi := \frac{t}{2} + \frac{1}{7} \sin(t) + \frac{1}{9} \sin(2t) + \frac{2}{31} \sin(3t). \quad (9)$$

На рис. 2 зображено графік першої похідної  $\Phi'$  передавальної функції  $\Phi$ , яка описується рівнянням

$$\eta := \frac{1}{2} + \frac{1}{7} \cos(t) + \frac{2}{9} \cos(2t) + \frac{6}{31} \cos(3t) . \quad (10)$$

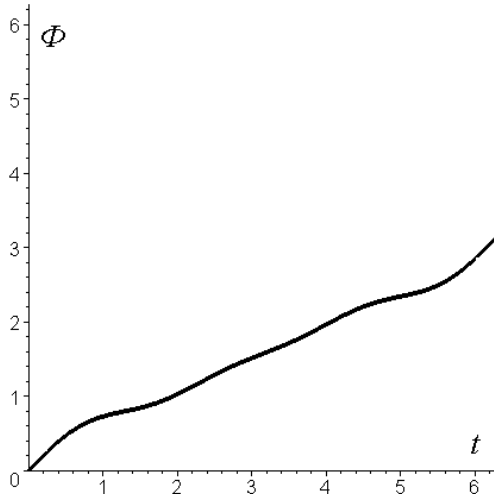


Рис. 1. Графік передавальної функції  $\Phi(t)$ .

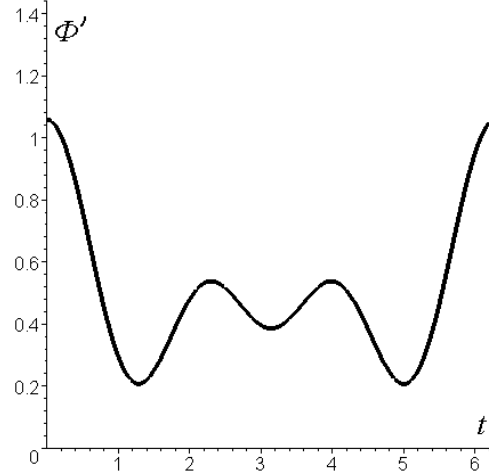


Рис. 2. Графік першої похідної передавальної функції  $\Phi(t)$ .

Окремі кадри анімації сумісного обертання пари центрід зубчатих коліс нетрадиційної форми для заданої передавальної функції  $\Phi(t)$  наведено на рис. 3.

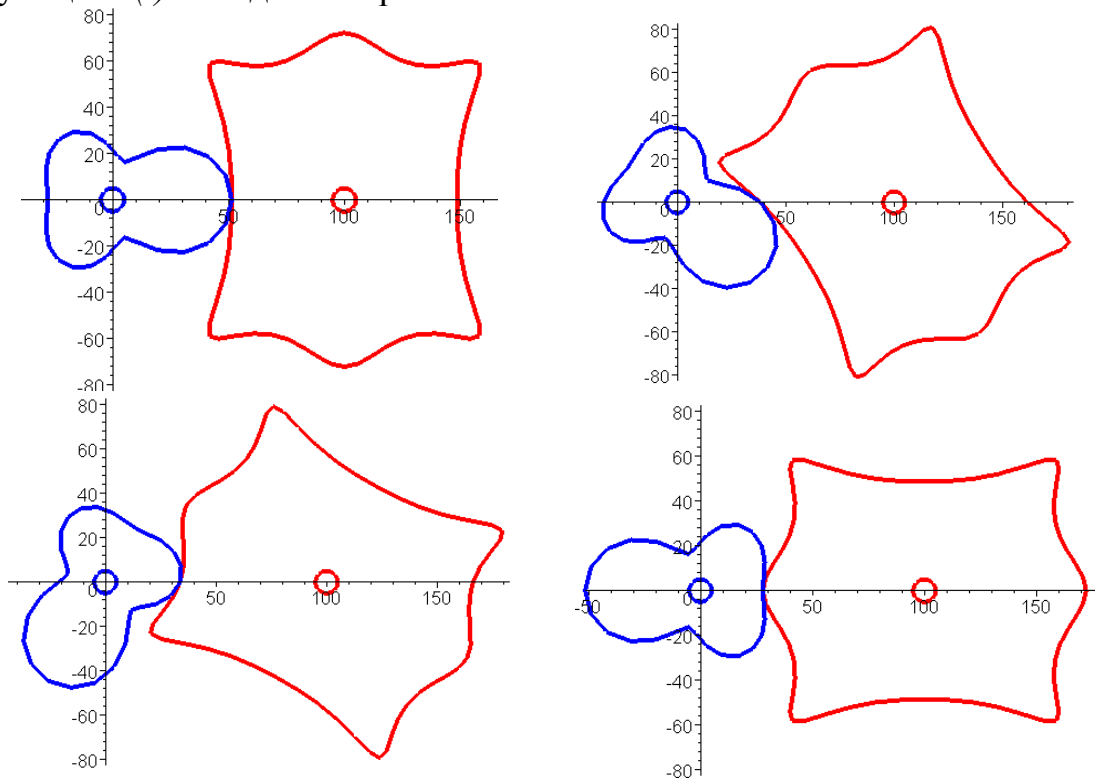


Рис. 3. Кадри анімації сумісного обертання пари центрід для передавальної функції (9).

На рис. 4 наведено кадри анімації для пари центроїд, побудованих для передавальної функції

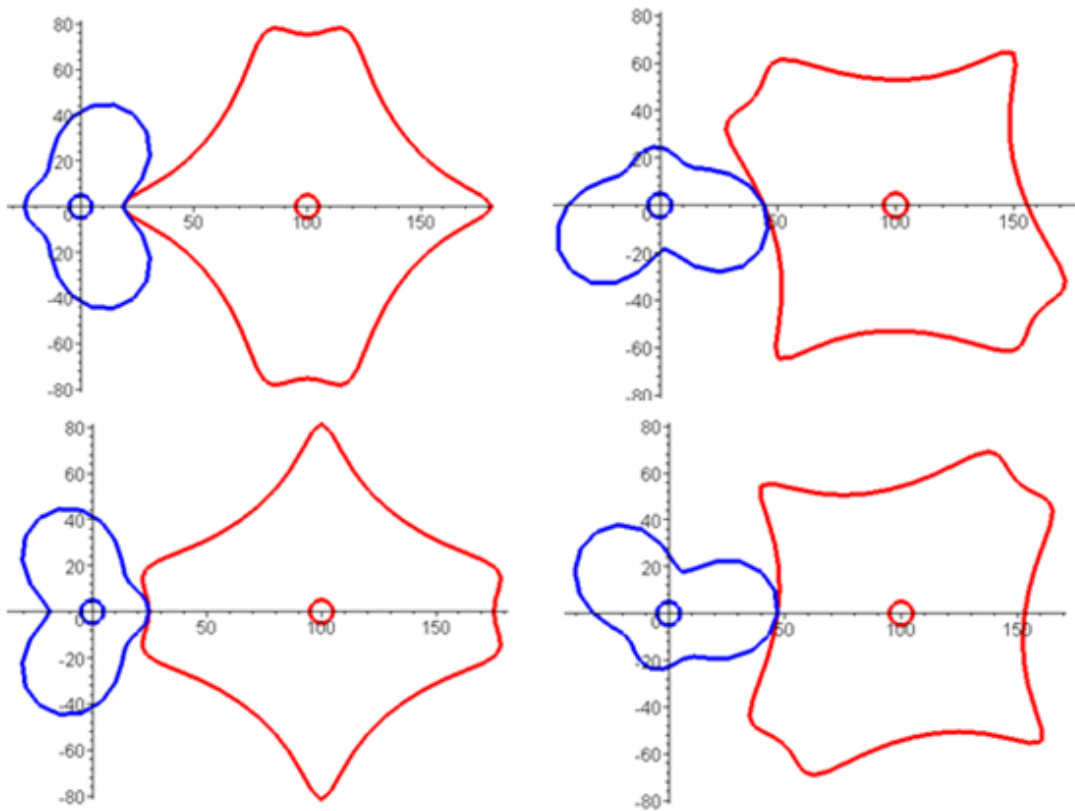
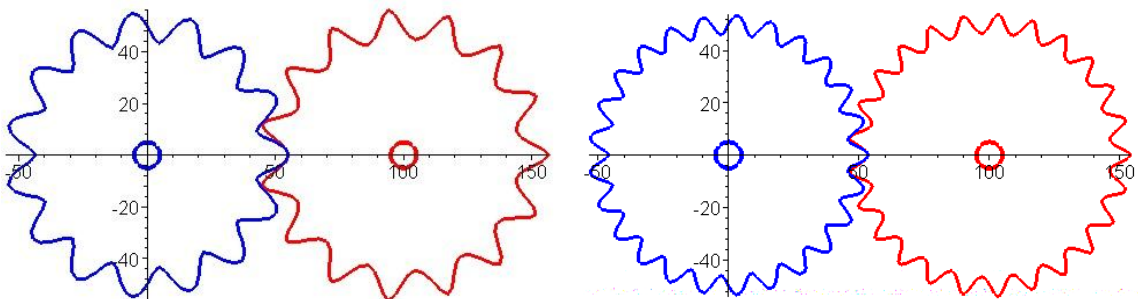


Рис. 4. Кадри анімації сумісного обертання пари центроїд для передавальної функції (11).

На рис.5 наведено кадри анімації сумісного обертання центроїд для передавальних функцій  $\Phi := 1 + t + \frac{1}{65} \sin(15t)$  і  $\Phi := 1 + t + \frac{1}{165} \sin(25t)$ .



*a*

*б*

Рис. 5. Центроїди для передавальних функцій:  
*a*)  $\Phi := 1 + t + \frac{1}{65} \sin(15t)$  ; *б*)  $\Phi := 1 + t + \frac{1}{165} \sin(25t)$  .

*Висновки.* Аналітичний опис центроїд зубчатих коліс дозволяє аналізувати і коригувати їх нетрадиційні геометричні форми.

#### Література

1. *Артоболевский И.И.* Теория механизмов и машин. / И.И. Артоболевский. – М.: Наука, 1975. – 639 с.
2. *Литвин Ф.Л.* Некруглые зубчатые колеса. / Ф.Л. Литвин. – М.: Машгиз, 1956. – 312 с.
3. *Laczik V.* Measuring of Gears with General (Non–Circular) Pitch Curve / V. Laczik, Z. Szaniszló. – Helsinki, 2001. – P. 373–376.
4. *Утутов Н.Л.* Некруглые зубчатые колеса и основы синтеза уравнительных передач для цепных механизмов: дис. ... д-ра техн. наук: 05.02.02 / Н.Л. Утутов, Восточноукраинский гос. ун-т. – Луганск, 1999. – 456 с.
5. *Киреев С.О.* Аналитическое определение профилей зубьев эллиптического колеса. / С.О. Киреев, Н.А. Падалко, А.П. Падалко // Техн. Науки: изв. вузов Сев.–Кавк. регион. – 2000. – №3.– С. 31–34.
6. *Легета Я.П.* Опис та побудова замкнутої кривої за її натуральним рівнянням / Я.П. Легета // Прикладна геометрія та інженерна графіка – К.: КНУБА, 2011. – Вип.88. – С. 219-228.

## ОПИСАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ЦЕНТРОИД НЕКРУГЛЫХ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС

Я.П. Легета

*Аннотация* – на основании аналитического описания средствами математического пакета Maple рассмотрено геометрическое моделирование центроид зубчатых колес нетрадиционной формы.

## THE DESCRIPTION AND CONSTRUCTION OF THE CONJUGATE CENTROIDS NONROUND GEARS

Ia. Legeta

### *Summary*

**Based on an analytical description of the means mathematical Maple package consider the geometric modeling of the centroids gears unconventional shapes.**