УДК 514.18

ПОВОРОТ ЗОБРАЖЕНЬ НА ПОВЕРХНЯХ, ВІДНЕСЕНИХ ДО ПРОСТОРОВИХ ІЗОМЕТРИЧНИХ СІТОК

Несвідомін В.М., д.т.н.,
Пилипака Т.С., к.т.н.,
Кремець Т.С., аспірант *
Національний університет біоресурсів і природокористування України (Київ)
Тел. (044) 527-82-26

Анотація **– розглянуто варіанти повороту зображення на поверхні, яка віднесена до ізометричної сітки. Створена аналітична модель повороту самої сітки на поверхні, а також поворот зображення по відношенню до сітки. Наведено приклади зображень на поверхні кулі до і після повороту.**

Ключові слова **– просторові ізометричні сітки, плоске зображення, внутрішнє рівняння, поворот сітки поворот зображення.**

Постановка проблеми. Ортогональна сітка координатних ліній на поверхні, зокрема на площині, яка розбиває її на нескінченно малі квадрати, носить назву ізометричної. Частковим випадком такої сітки є сітка декартової системи координат, утворена перетином двох сімей координатних прямих ліній. Ізометричні сітки можуть бути просторовими, тобто поверхня може бути віднесена до ізометричних координат. Проте не всі поверхні можуть бути таким чином описані. В роботі [1] розглянуто конструювання поверхонь обертання, віднесених до ізометричних сіток координатних ліній. На основі математичної відповідності між чарунками ізометричної сітки на поверхні і плоскої декартової можна конформно відображати на поверхню плоске зображення [2]. В статті розглянуто можливість повороту зображення на поверхні.

Аналіз останніх досліджень. В праці [2] показано перехід від прямокутної сітки полярної системи координат до відповідної ізометричної сітки. Відображення прямих і кривих ліній на таку ізометричну сітку та конструювання із них візерунків розглянуто в праці [4]. Конформне відображення плоских рисунків (написів) на просторові ізометричні сітки конуса і кулі показано в праці [2].

Формулювання цілей статті. Розробити аналітичну модель

* Науковий керівник: д.т.н., професор Несвідомін В.М.

повороту зображення на поверхні, віднесеної до ізометричної сітки координатних ліній.

Основна частина. Плоска декартова система координат є ізометричною. Її параметричні рівняння мають вигляд:

$$X = u; \quad Y = v, \tag{1}$$

де u, v – незалежні змінні.

Перша квадратична форма ізотермічної сітки характеризується тим, що до неї входить складова $du^2 + dv^2$, яка може бути помножена на певний коефіцієнт, залежний від змінних u і v. Для координатної сітки (1) цей коефіцієнт дорівнює одиниці, тобто перша квадратична форма має вигляд $dS^2 = du^2 + dv^2$.

Якщо незалежні змінні u і v зв'язати між собою через третю змінну, наприклад, t, то два рівняння $u=u(t)$ і $v=v(t)$, які називаються внутрішніми, опишуть лінію на ізометричній сітці. Наприклад, задамо внутрішнє рівняння у вигляді:

$$u = at + u_0; \qquad v = b\sin t + v_0, \tag{2}$$

де a, b – сталі, які впливають на форму синусоїди;

u_0, v_0 – сталі, які впливають на місце розташування синусоїди.

При підстановці (2) у (1) ми отримаємо синусоїду (рис. 1,а).

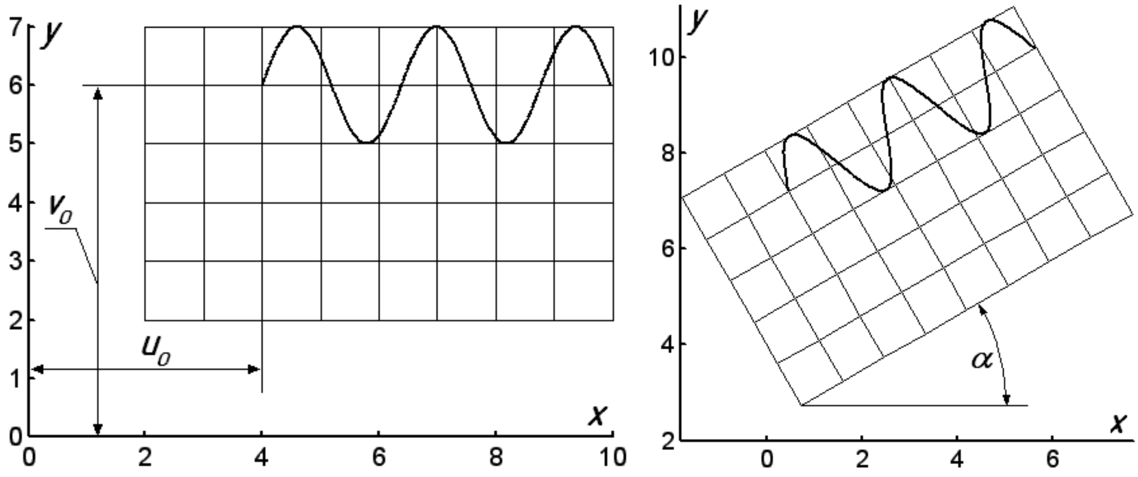


Рис.1. Плоска декартова система координат із синусоїдою, віднесеною до ізометричної сітки: а) без повороту; б) із поворотом на кут α.

Повернемо декартову ізометричну сітку на кут α. Використаємо відомі формули повороту, за якими u-лінії і v-лінії будуть повернуті на кут α. Після такого повороту декартова ізометрична сітка (1) запишеться:

$$X = u\cos\alpha - v\sin\alpha; \quad Y = u\sin\alpha + v\cos\alpha. \tag{3}$$

При підстановці внутрішнього рівняння синусоїди (2) у рівняння сітки (3) ми отримаємо зображення, показане на рис. 1,б, тобто ізометрична сітка і побудована відносно неї синусоїда будуть повернуті на кут α. При $\alpha=0$ рівняння (3) перетворюються у рівняння (1).

Розглянемо ізометричну сітку на поверхні кулі одиничного радіуса. Її параметричні рівняння в цьому випадку та перша квадратична форма мають вигляд [2]:

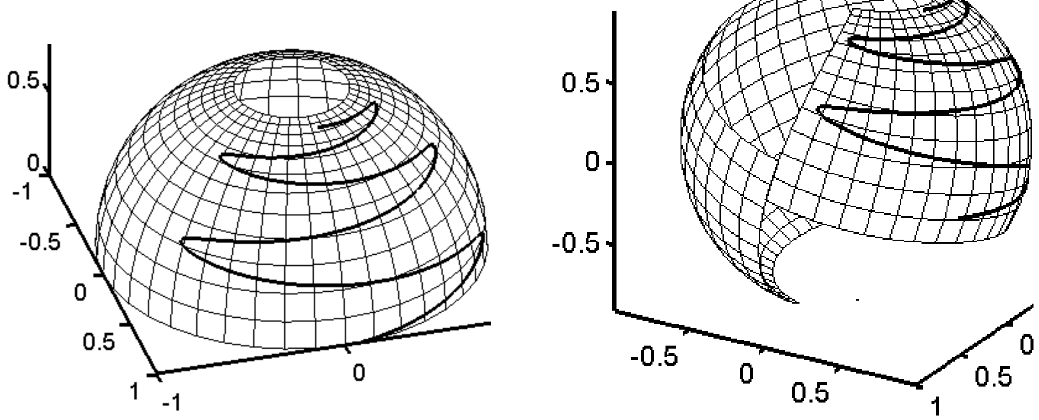
$$\begin{aligned} &X = \mathrm{sech} u \cos v; \\ &Y = \mathrm{sech} u \sin v; \qquad dS^2 = \mathrm{sech}^2 u\left(du^2 + dv^2\right). \\ &Z = \tanh u; \end{aligned} \tag{4}$$

Здійснимо поворот координатних u- і v-ліній на кут α за формулами (3). В такому випадку рівняння кулі (4) і її перша квадратична форма набирають вигляду:

$$\begin{aligned} &X = \mathrm{sech}(u\cos\alpha - v\sin\alpha)\cos(u\sin\alpha + v\cos\alpha); \\ &Y = \mathrm{sech}(u\cos\alpha - v\sin\alpha)\sin(u\sin\alpha + v\cos\alpha); \\ &Z = \tanh(u\cos\alpha - v\sin\alpha). \end{aligned} \tag{5}$$

$$dS^2 = \mathrm{sech}^2(u\cos\alpha - v\sin\alpha)\left(du^2 + dv^2\right). \tag{6}$$

При $\alpha=0$ рівняння (5) і перша квадратична форма (6) перетворюються у відповідні вирази, наведені в (4). При підстановці внутрішніх рівнянь синусоїди (2) у рівняння кулі (4) ми отримаємо конформне відображення синусоїди на поверхню кулі (рис. 2,а). На рис. 2,б побудовано відображення синусоїди (2) на поверхню кулі (5) при $\alpha=15^0$.



а б

Рис. 2. Ізометрична сітка кулі (5) із віднесеною до неї синусоїдою (2):

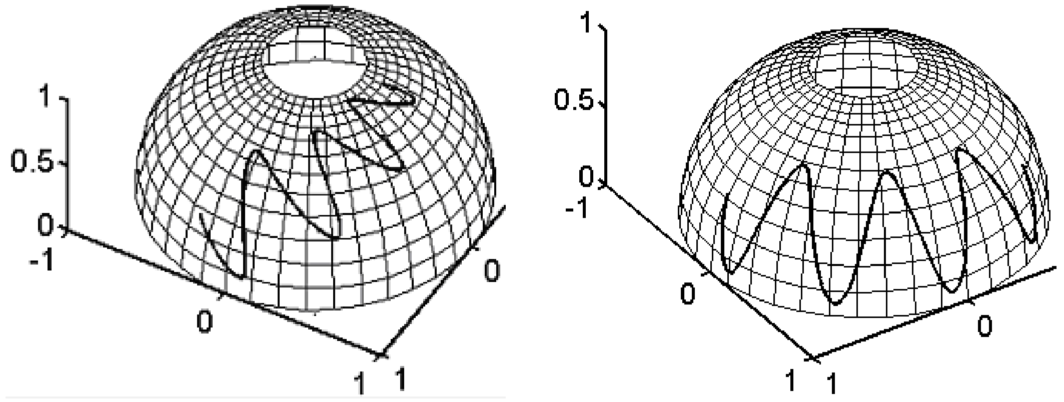
а) без повороту ($\alpha=0$); б) із поворотом на кут $\alpha=\pi/24$.

Як видно із рис. 2,б, сітка при повороті на кут α деформується: її координатні лінії, які були плоскими паралелями і меридіанами перетворюються у просторові. Але при цьому сітка залишається ізометричною, про що свідчить перша квадратична форма (6).

Окрім повороту сітки по відношенню до поверхні, можна здійснювати поворот самого зображення по відношенню до сітки. Запишемо внутрішнє рівняння синусоїди (2) із поворотом її на кут β:

$$\begin{aligned} u &= (at + u_0)\cos\beta - (b\sin t + v_0)\sin\beta; \\ v &= (at + u_0)\sin\beta + (b\sin t + v_0)\cos\beta. \end{aligned} \tag{7}$$

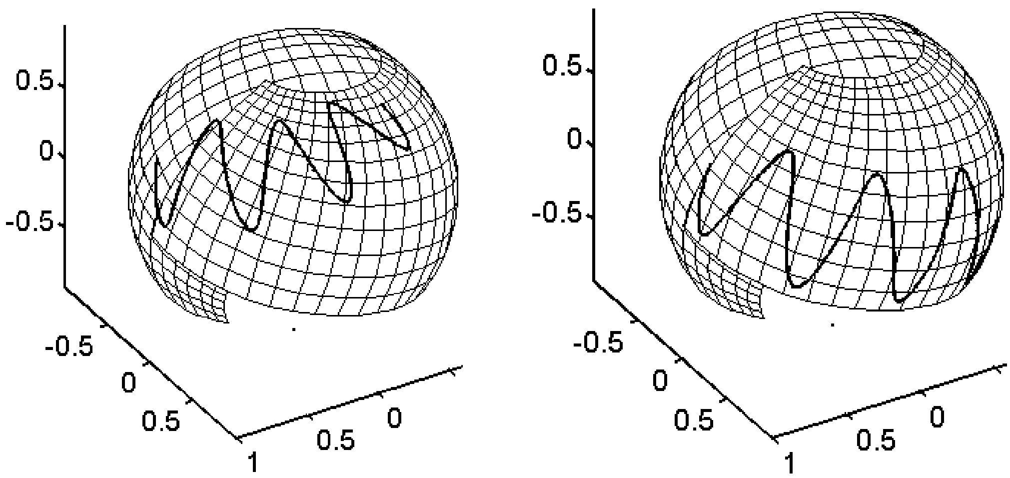
Якщо внутрішнє рівняння синусоїди (7) підставити в рівняння сітки (4) або (5), то вона буде повернута по відношенню до неї на кут β. На рис. 3 побудовані сферичні ізометричні сітки за рівняннями (5) при $\alpha=0$, тобто без повороту, і нанесена синусоїда (7) з різним кутом повороту β.



а б

Рис. 3. Ізометрична сітка кулі (5) при $\alpha=0$ із нанесеною на неї синусоїдою (7):

а) $\beta=\pi/3$; б) $\beta=\pi/2$.



а б

Рис. 4. Ізометрична сітка кулі (5) при $\alpha=\pi/24$ із нанесеною на неї синусоїдою (7):

а) $\beta=\pi/3$; б) $\beta=\pi/2$.

На рис. 4 здійснено подвійний поворот: повернута сітка на кут $\alpha=\pi/24$ і синусоїда на різні кути по відношенню до сітки.

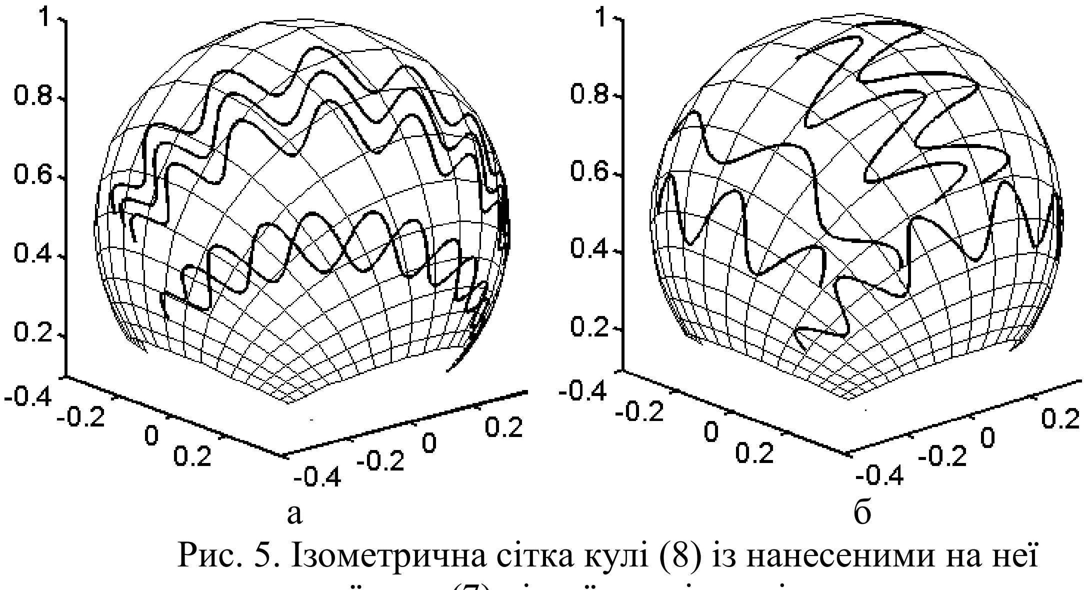
Розглянемо ще одну сферичну ізометричну сітку, в яку перетворюється плоска декартова сітка за допомогою інверсії. Її параметричні рівняння до і після повороту на кут α запишуться:

$$X=\frac{u}{u^2+v^2+1}; \qquad X=\frac{u\cos\alpha-v\sin\alpha}{u^2+v^2+1};$$
$$Y=\frac{v}{u^2+v^2+1}; \qquad Y=\frac{u\sin\alpha+v\cos\alpha}{u^2+v^2+1}; \tag{8}$$
$$Z=\frac{1}{u^2+v^2+1}. \qquad Z=\frac{1}{u^2+v^2+1}.$$

Перша квадратична форма поверхонь (8) не залежить від значення кута повороту α і має вигляд:

$$dS^2=\frac{du^2+dv^2}{\left(u^2+v^2+1\right)^2}. \tag{9}$$

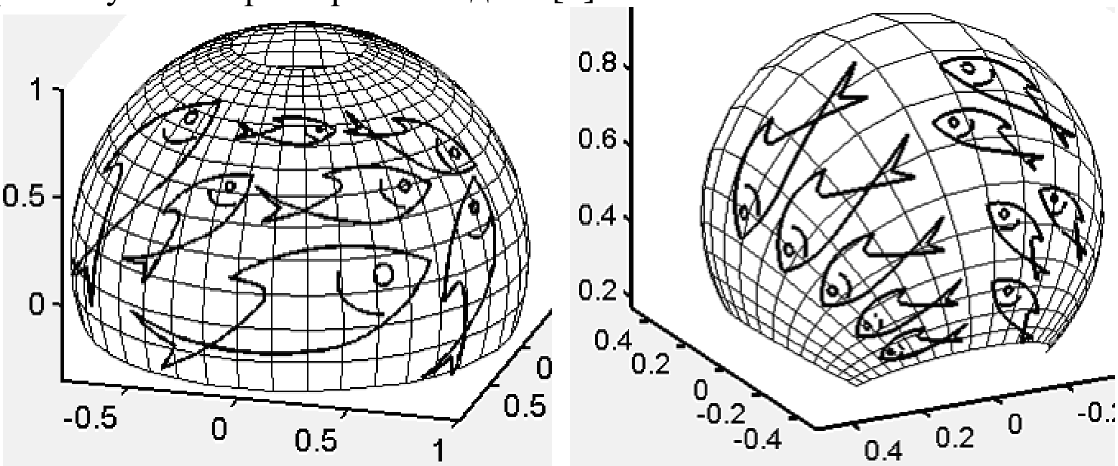
Незалежність ізометричної сітки (8) від кута α означає, що вона не деформується при повороті на заданий кут α: при повороті вона ковзає по кулі навколо її вертикальної осі не деформуючись. Тому при повороті сітки немає сенсу використовувати кут α, а поворот зображення можна здійснити з допомогою кута β у внутрішніх його рівняннях. На рис. 5 побудовано синусоїду (7) із різними кутами β її повороту по відношенню до сітки (8).



а б

Рис. 5. Ізометрична сітка кулі (8) із нанесеними на неї синусоїдами (7) різної амплітуди і кроку:
а) $\beta=\pi/3$; б) $\beta=0$ і $\beta=\pi/2$.

Поворот ізометричної сітки, а також ліній по відношенню до сітки можна використати для повороту на поверхні зображення, яке складається із комбінацій окремих ліній. Наприклад, можна нанести на кулю зображення рибки, утвореної спряженими дугами кіл, розташування і розмір яких відомі [5]:



а б

Рис. 6. Зображення рибок на поверхні кулі:
а) куля віднесена до ізотермічної сітки (4);
б) куля віднесена до ізотермічної сітки (8).

На рис. 6 побудовані рибки на поверхні кулі, віднесеної до різних ізометричних сіток. Для кожного зображення задавались положення на сітці, кут повороту відносно неї та масштабний коефіцієнт, який задає розмір зображення.

Висновки. Поверхню кулі можна віднести до різних ізометричних сіток. Сітку можна повертати на поверхні на заданий кут. Існують сітки, які при такому повороті деформуються, залишаючись ізометричними. Інші сітки при повороті не деформуються. Аналітично їх можна розрізнити за першою квадратичною формою поверхні: у першому випадку до неї входить значення кута повороту, а в другому – не входить. На сітки обох типів можна конформно відображати плоскі зображення, причому їх теж можна повертати на заданий кут на поверхні кулі, але уже по відношенню не до поверхні, а до сітки.

Література

1. *Несвідомін В.М.* Конструювання поверхонь обертання, віднесених до ізометричних сіток координатних ліній / В.М. Несвідомін, Т.С. Кремець // Міжвідомчий науково-технічний збірник. Випуск 89 «Прикладна геометрія та інженерна графіка».– Київ: КНУБА, 2012.– С.271-276.
2. *Кремець Т.С.* Конформне відображення написів на ізометричні сітки конуса та кулі / Т.С. Кремець // Технічна естетика і дизайн. – К.: Віпол, 2011. – Вип. 9. – С. 112 – 117.

3. *Несвідомін В.М.* Відображення написів на плоскі ізотермічні сітки / В.М. Несвідомін, Т.С. Кремець // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Вип. 4, Т. 48. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – С. 15 – 21.
4. *Несвідомін В.М.* Відображення прямих і кривих ліній на плоску ізометричну сітку полярної системи координат та конструювання із них візерунків / В.М. Несвідомін, Т.С. Кремець // Міжвідомчий науково-технічний збірник. Випуск 87 «Прикладна геометрія та інженерна графіка».– Київ: КНУБА, 2011.– С.285-290.
5. *Несвідомін В.М.* Перетворення плоских зображень шляхом нанесення їх на різні ізометричні сітки / В.М. Несвідомін, Т.С. Пилипака, Т.С. Кремець // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Вип. 4, Т. 56. – Мелітополь:ТДАТУ, 2013. – С. 158 – 163.

ПОВОРОТ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТЯХ, ОТНЕСЕННЫМ К ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ИЗОМЕТРИЧЕСКИМ СЕТЯМ

В.Н. Несвидомин, Т.С. Пилипака, Т.С. Кремец

Аннотация **– рассмотрено варианты поворота изображения на поверхности, которая отнесена к изометрической сети. Создана аналитическая модель поворота самой сети на поверхности, а также поворот изображения по отношению к сети. Приведены примеры изображений на поверхности сферы до и после поворота.**

TURN OF IMAGES ON SURFACES WHICH ARE REFERRED TO SPACE ISOMETRIC WEBS

V. Nesvidomin, T. Pylypaka, T. Kremetz

Summary

It is considered variants of turn of the image on a surface which is referred to an isometric web. The analytical model of turn of the web on surfaces, and also image turn in relation to a web is created. Examples of images on a surface of an orb before turn and after turn are directed.