УДК 515.2

ВИЗНАЧЕННЯ ТРАЄКТОРІЇ ОБХОДУ ПЕРЕШКОДИ РОБОТОМ ЗА ДОПОМОГОЮ ГЕОДЕЗИЧНОЇ ЛІНІЇ

Табакова І.С., аспірант*
Харківський національний університет радіоелектроніки
Тел. 050-651-97-22

Анотація **– розроблено, оснований на використанні геодезичної лінії допоміжної (обволікаючої) поверхні, спосіб опису та побудови траєкторії руху по площині робота, який повинен обійти перешкоду.**

Ключові слова **– траєкторія руху робота, геодезична лінія, обволікаюча поверхня, система рівнянь для геодезичних, розв'язання системи рівнянь геодезичних.**

Постановка проблеми. Одна з головних проблем, яка виникає при керуванні мобільним роботом, полягає у побудові траєкторій руху, враховуючи можливі перешкоди на шляху переміщення робота. При цьому апріорі вважається, що траєкторію бажано визначати найкоротшою. До того ж знайдена траєкторія повинна відповідати певним умовам [1]. Наприклад, робот, який у автоматичному режимі обстежує деяку зону, наприкінці шляху має досягти заздалегідь відомого місця (у тому числі, для підзарядки батарей).

Аналіз відомих результатів. В роботі [2] розглянуто алгоритм визначення траєкторії робота як інтерпретації «руху по неплоскій поверхні», ідея якого полягає в такому. Плоску карту з наявністю перешкод пропонується представити як неплоску абстрактну поверхню, заміняючи перешкоди гладкими «пагорбами». Якщо проїзд по вільним від перешкод зонам (наприклад, по асфальту, по піску, по траві, по заболоченій місцевості, тощо), пов'язаний з різними витратами ресурсів, то на зазначеній неплоскій карті ці зони також можна задати додатковими умовними пагорбами й западинами.

Для алгоритмічної реалізації такого підходу траєкторію руху бажано визначати аналітичними методами. В роботі [3] були розглянуті способи розв'язання цього завдання за допомогою геодезичних ліній. При цьому зазначається складність практичного досягнення мети керування. В роботі [2] пропонується спрощений підхід: знайти траєкторію за допомогою варіаційних методів [4].

---

*Науковий керівник: к.т.н., професор Ткаченко В.П.

Нехай неплоска зона інтересу виражається функцією $z = f(x, y)$, де z – уявна «висота» певної точки траєкторії; x і y - декартові координати проекції точки поверхні на площину. Необхідно мінімізувати функціонал $T = \int_{x_s}^{x_e} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{f(x,y)} dx$ з граничними умовами: $y(x_S) = y_S; \, y(x_E) = y_E$, де x_S і y_S - декартові координати початкової точки; x_E і y_E - декартові координати кінцевої (цільової) точки.

При пошуку екстремуму зазначеного функціонала передбачається штучна вимога, щоб шукана крива мала явне рівняння y=y(x). Це істотно звужує розв'язок задачі, адже прямі, паралельні осі Oy, можуть перетинати криву в декількох точках розв'язків [4].

Для розширення фактору «явного рівняння» функціонал слід перетворити з використанням параметричного завдання кривої:

$$T = \int_{0}^{t_e} \frac{\sqrt{1+(\frac{y'}{x'})^2}}{f(x,y)} x' dt \qquad (1)$$

з граничними умовами: $y(0) = y_S; \, x(0) = x_S; \, y(t_e) = y_e; \, x(t_e) = x_e.$

Тоді проблема зводиться [4] до розв'язання системи двох диференціальних рівнянь 2-го порядку:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^{2'}} F \cdot x'' + \frac{\partial^2}{\partial x \partial x'} F \cdot x' + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x'} F - \frac{\partial}{\partial x} F = 0 \; ; \\ \frac{\partial^2}{\partial y^{2'}} F \cdot y'' + \frac{\partial^2}{\partial y \partial y'} F \cdot y' + \frac{\partial^2}{\partial t \partial y'} F - \frac{\partial}{\partial y} F = 0 \, , \end{cases} \qquad (2)$$

де F – підінтегральний вираз у формулі (1).
де F – підінтегральний вираз у формулі (1).

Алгоритм «руху по неплоскій поверхні» забезпечує прохід по границях перешкод швидко лише у випадку простих перешкод, у яких мала кількість «кутів». Якщо ціль недосяжна й кількість перешкод з кількістю граней велике, то при реалізації алгоритму може не вистачити ресурсів обчислювача. Але цей алгоритм має велику перевагу перед іншими алгоритмами, адже в ньому можна врахувати різні коефіцієнти прохідності. Мінуси очевидні – час чисельного розв'язання рівнянь суттєво залежить від конфігурації поверхні.

В роботі [5] пропонується метод відслідковувати середню (геодезичну) криву, яка розташовується між двома граничними допоміжними кривими. Метод розроблений для регулярних поверхонь і базується на чисельному розв'язанні системи рівнянь для геодезичної у просторі параметрів поверхні.

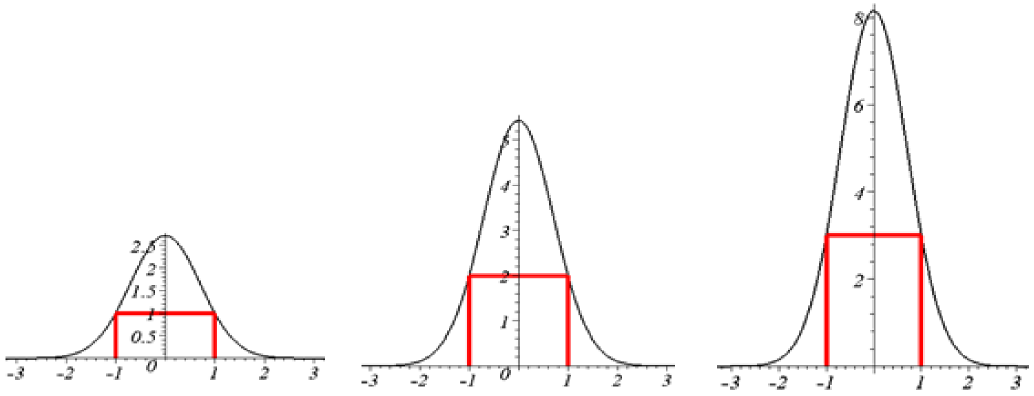
У роботі [6] розглянуто пошук геодезичної наближеним способом кінченої різниці у вигляді «методу пострілів», який на практиці чутливий до вибору початкових кутів у початковій точці.

Формулювання цілей статті. Розробити оснований на використанні геодезичної лінії допоміжної (обволікаючої) поверхні спосіб опису та побудови траєкторії руху по площині робота, який повинен обійти перешкоду.

Основна частина. Спочатку розглянемо функцію:

$$f(u) = h\, exp\left(1 - \frac{(u-a)^2}{r^2}\right), \tag{3}$$

графіки якої при $r = 1$ і $a = 0$ залежно від h наведено на рис. 1.



$h = 1$ $h = 2$ $h = 3$

Рис 1. Графіки функції (3) залежно від параметра h.

За допомогою функції (3) утворимо функцію двох змінних

$$f(u,v) = h\, exp\left(1 - \frac{(u-a)^2 + (v-b)^2}{r^2}\right), \tag{4}$$

графік якої при $r = 1$, $a = 1$, b=1 і h =1 наведено на рис. 2.

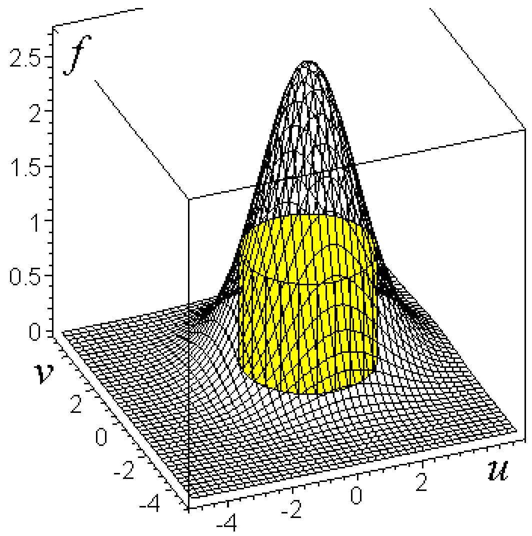


Рис. 2. Графік функції (4) при $r = 1$, $a = 1$, b=1 і h =1.

З рис. 2 видно, як графік зазначеної функції (4) «обволікає» поверхню циліндра, утворену в результаті обертання навколо вертикальної осі «ступінчатої» функції з рис.1.

Підкреслимо, що наведений циліндр є умовним об’єктом; у подальшому буде використано лише його зображення на горизонтальній площині, а обволікаюча поверхня – допоміжний об’єкт, на якому будуть будуватися геодезичні лінії.

Задача. Визначити траєкторію руху робота від точки A до точки B за умови обходу перешкоди G на шляху руху у вигляді круга (рис. 3).

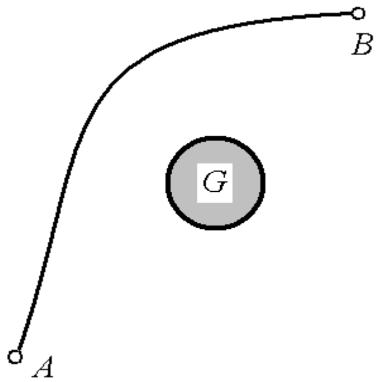


Рис. 3. Траєкторії руху робота за умови обходу перешкоди G.

У якості парадигми алгоритму визначення траєкторії руху робота оберемо таке: шукана траєкторія T буде проекцією на горизонтальну площину геодезичної кривої, побудованої на відповідній обволікаючій поверхні.

При чому, геодезична крива має з’єднувати точки A′ і B′ на обволікаючій поверхні, проекціями яких на площині будуть точки A і B.

Описати геодезичну лінію можна за допомогою системи диференціальних рівнянь [7]:

$$u'' + Г^1_{11}\, u^2 + 2Г^1_{12}\, uv + Г^1_{22}\, v^2 = 0, \qquad (5)$$
$$v'' + Г^2_{11}\, u^2 + 2Г^2_{12}\, uv + Г^2_{22}\, v^2 = 0.$$

З врахуванням початкових умов:

$$u(0)=u0,\ v(0)=v0,\ u'(0)=du0,\ \ v'(0)=dv0.$$

система (5) має єдиний розв’язок. Це означає, що через кожну точку поверхні в заданому напрямку проходить тільки одна геодезична.

Вирази $Г^k_{ij}$ називаються символами Кристоффеля*;* їх доцільно записувати через коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні:

$$Г^1_{11} = (E_uG - 2F_uF + E_vF) / (2(EG - F^2));$$
$$Г^2_{11} = (2F_uE - 2E_vE - E_uF) / (2(EG - F^2));$$
$$Г^1_{12} = Г^1_{21} = (E_vG - G_uF) / (2(EG - F^2)); \qquad (6)$$
$$Г^2_{12} = Г^2_{21} = (G_uE - E_vF) / (2(EG - F^2));$$
$$Г^1_{22} = (2F_vG - G_uG - G_vF) / (2(EG - F^2));$$
$$Г^2_{22} = (G_vE - 2F_vF + G_uF) / (2(EG - F^2));$$

Отже, при дослідженні геодезичних ліній поверхонь виникає необхідність розв'язання систем звичайних нелінійних диференціальних рівнянь. У більшості випадків нелінійні диференціальні рівняння не мають аналітичного розв'язків, тому широко застосовуються комп'ютерні методи дослідження систем рівнянь геодезичних.

Можливості Maple дозволяють одержати впорядковану систему рівнянь геодезичних і заснованого на цій системі чисельного розв'язків й графічного подання розв'язків цієї системи для довільно заданих поверхні та початкових умов.

Засобами пакету Maple: за заданих параметричних рівняннях поверхні формується система рівнянь геодезичних; створюється процедура чисельного інтегрування системи рівнянь геодезичних при заданих початкових умовах; створюється процедура графічного подання розв'язків системи рівнянь геодезичних. Було складено maple- програму визначення геодезичної кривої.

Тестовий приклад. Розглянемо поверхню, описану рівнянням

z = f(0,0,3)+f(2,2,2)+f(-2,-2,2)+f(-1,2,3)+f(1,-2,2)+f(2,0,2)], (7)

де

f(a,b,h) = h*exp(-(u-a)^2-(v-b)^2).

На рис. 4 наведено результат виконання програми – зображення геодезичної на поверхні, та її проекція на горизонтальну площину.

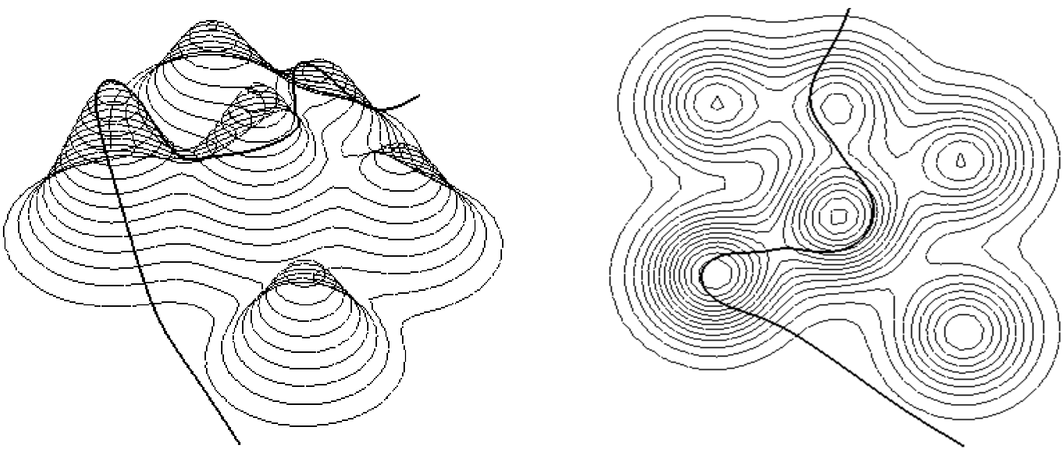


Рис. 4. Результат виконання програми.

У розробленому алгоритмі для трасування робота є можливість впливати на форму траєкторії зміною параметра h у формулі (4).

Приклад. На рис. 5 – 7 наведено деякі варіанти для $r = 2$. При цьому стартова точка мала координати {u0= -5; v0= -5}. Напрям руху задавався вектором {Du0= 3; Dv0= 1.5}.

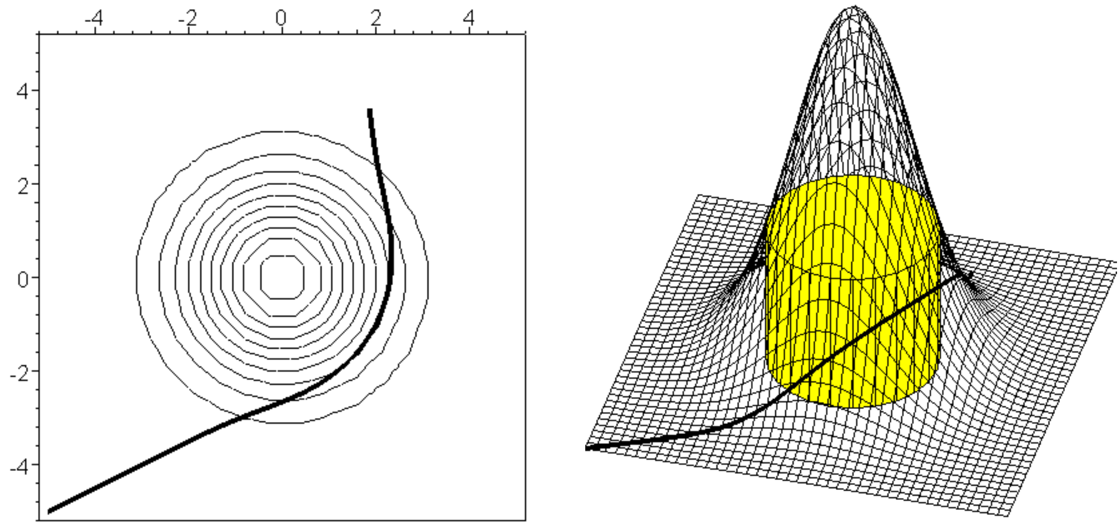


Рис. 5. Траєкторія руху для значення параметра $h = 2$.

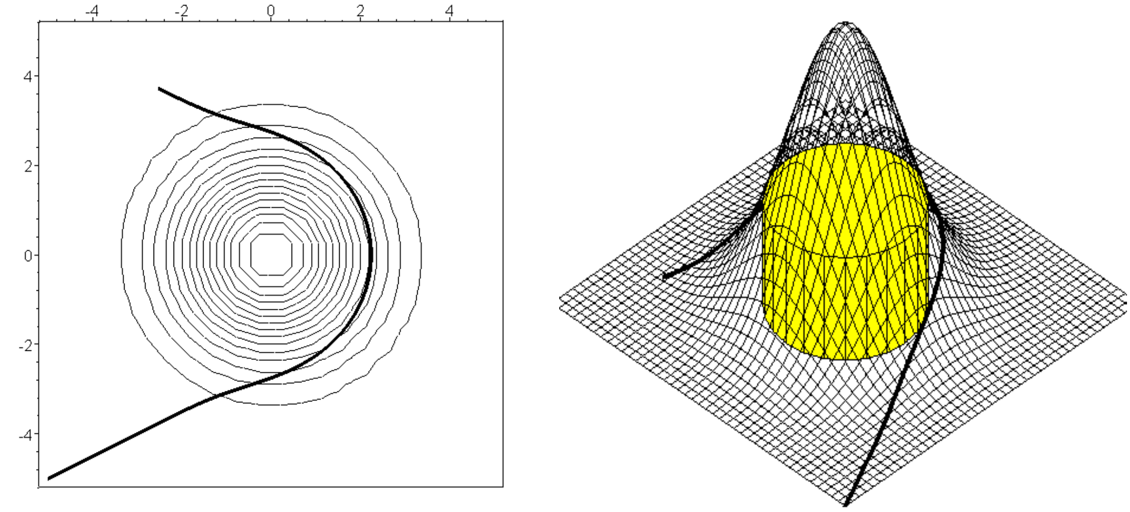


Рис. 6. Траєкторія руху для значення параметра $h = 3$.

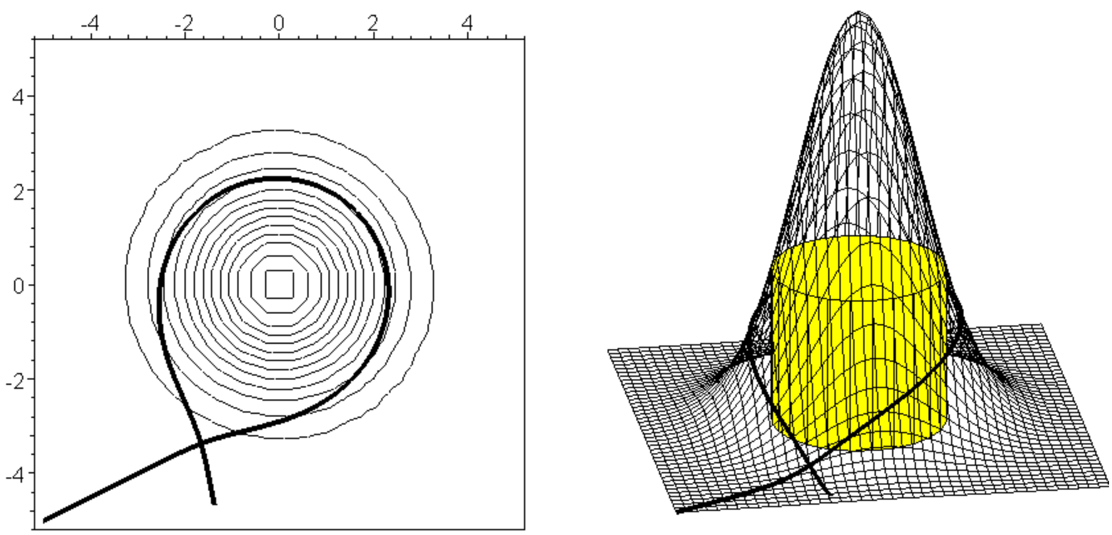


Рис. 7. Траєкторія руху для значення параметра $h = 4$.

До переваг методу слід віднести можливість «нарощувати» кількість перешкод. Для цього необхідно за допомогою R–функцій описати об'єднані перешкоди.

Приклад. Нехай необхідно визначити траєкторію для обходу перешкод у вигляді кругів з одиничними радіусами і з координатами центрів, відповідно, (0,0) і (0,6). Для цього позначимо:

$$f_1(u,v) = h\,exp\left(1-u^2-v^2\right);\; f_2(u,v) = h\,exp\left(1-u^2-(v-6)^2\right) \quad (8)$$

і R -диз'юнкцію задамо формулою

$$F = \left(f_1(u,v)+f_2(u,v)+\left|f_1(u,v)-f_2(u,v)\right|\right)/2, \quad (9)$$

або, у розгорнутому вигляді (h = 2):

$$F := \mathbf{e}^{(1-u^2-v^2)} + \mathbf{e}^{(1-u^2-(v-6)^2)} + \frac{1}{2}\left|2\,\mathbf{e}^{(1-u^2-v^2)} - 2\,\mathbf{e}^{(1-u^2-(v-6)^2)}\right|.$$

На рис. 8 при h=2 зображено варіант обчислень для (-5, -5) – координат точки старту і {Du0= 1,5; Dv0= 1} вектора напрямку початкового руху.

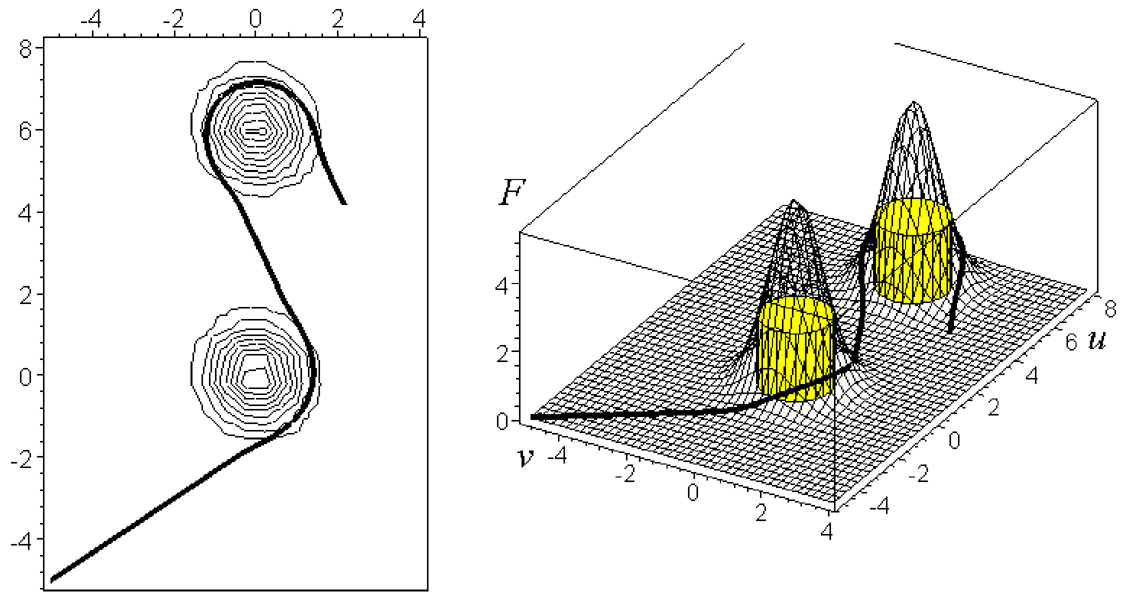


Рис. 8. Траєкторія руху для значення параметра h = 2.

Висновок. Розроблений метод опису та побудови траєкторії руху по площині робота, який повинен обійти перешкоду. При цьому суттєвим є те, що метод базується на використанні геодезичної лінії допоміжної (обволікаючої) поверхні. Це дозволяє варіювати траєкторії руху робота залежно від параметра.

Література

1. Springer handbook of robotics. / edited by B. Siciliano, Ous. Khatib/ – LX, 2008. – 1611 p.

2. Построение траекторий движения для мобильного робота [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.rusnauka.com/ 5_SWMN_2012/Tecnic/ 11_99 991.doc.htm.
3. *Vasilyev I.A.* Control System of Mobile Vehicle Developed for Cross-Country Motion./ I.A.Vasilyev, A.M. Lyashin // Proc. «International Symposium on Industrial Electronics 2005». – Dubrovnic, 2005. – P. 173-175.
4. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики: 6-е изд., перераб. / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – Том 4. – 336 с.
5. Computation of Medial Curves on Surfaces. [Электронный ресурс]. Режим доступа: ftp://ftp.gdv.uni-hannover.de/papers/ WLR1.pdf.
6. *Patrikalakis N.M.* COMPUTATIONAL GEOMETRY. Lecture 20/ Massachusetts institute of technology [Електроний ресурс]. Режим доступу: http://ocw.mit.edu/courses /mechanical-engineering/2-158j-computational-geometry-spring-2003/lecture-notes/lecnotes20_fixed.pdf.
7. *Жукова Н.И.* Геодезические линии на поверхностях: учеб. пособие / Н.И. Жукова, А.В Багаев. – Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2008. – 54 с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ОБХОДА ПРЕПЯТСТВИЯ РОБОТОМ ПРИ ПОМОЩИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ

И.С. Табакова

***Аннотация* – разработан, основанный на использовании геодезической линии вспомогательной (обволакивающей) поверхности, способ описания и построения траектории движения по плоскости робота, который должен обойти препятствие.**

DEFINITION OF THE TRAJECTORY OF ROUND OF THE OBSTACLE BY THE ROBOT BY MEANS OF THE GEODETIC

I. Tabakova

Summary

The way of the description and creation of a trajectory of movement on the plane of the robot which has to bypass an obstacle is developed based on use of the geodetic line of an auxiliary (enveloping) surface.