УДК 514.18

МОДЕЛЮВАННЯ ПЛОСКОЇ КРИВОЇ ІЗ ЗАДАНИМ ЗАКОНОМ КРИВИНИ

Бадаєв Ю.І., д.т.н.,
Ганношина І.М.
Київська державна академія водного транспорту
ім. Петра Конашевича-Сагайдачного
Тел. (044) 400-69-43

***Анотація* - пропонується визначення поліноміального сегменту за заданими двома точками і першими похідними та кривинами в цих точках.**

***Ключові слова* – поліноміальний сегмент, кривина, перші і другі похідні.**

Постановка проблеми. В проектуванні обводів машин і агрегатів, які працюють у рухомому середовищі (літаки, автомобілі тощо) важливим є завдання обводу за заданим законом зміни кривини. Необхідно мати аналітичний апарат розв'язання цієї задачі.

Аналіз останніх досліджень. В роботах [2-6] пропонуються інтерактивні методи проектування обводів із заданою формою і кривиною, але вони не дають змогу передбачити результати на початку проектування.

Формулювання цілей статті. Метою статті є побудова аналітичного апарату моделювання криволінійного обводу за наперед заданим законом зміни кривини, що є важливим для проектування обводів літаків, автомобілів, суден, тощо.

Основна частина. Розглянемо наступну задачу:

Заданий на площині точковий ряд:

$$\Delta : Xi,\ Yi,\ i=0,1,\ \dots\ ,\ n,$$

а також в кожній точці задана кривина K_i.

Як відомо із [1], кривина для кривої $y = f(x)$ визначається формулою :

$$K^2 = \frac{y''^2}{(1+y'^2)^3}. \tag{1}$$

Як видно із формули (1) для того, щоб задати кривину в заданій точці, необхідно, як мінімум, задати першу похідну y_i'. При заданій першій похідній y_i' і кривині K_i визначається величина другої похідної

$$y_i''^2 = K_i^2\,(1 + y_i'^2)^3 \quad \text{або} \quad \pm y_i'' = \pm K(1 + y_i'^2)^3. \tag{2}$$

Таким чином поставлена задача перетворюється на наступну.

Задано точковий ряд із першими і другими похідними в них:

$$\Delta : x_i, y_i, y'_i, y''_i, \text{i=0, 1, … , n.}$$

Будемо моделювати криву, яка будується із зі стикованих сегментів поліномів на ділянках $i \div (i+1)$. Тобто, необхідно знайти таку поліноміальну криву, яка на участку $i \div (i+1)$ проходить через точки i , $(i+1)$ і має в цих точках задані похідні $y'_i, y''_i, y'_{i+1}, y''_{i+1}$.

Спочатку доведемо наступну теорему.

Для того, щоб поліноміальний *сегмент* проходив через дві задані точки 0 і 1 і мав в цих точках задані перші і другі похідні, необхідно, щоб поліном був не менше 5-го степеня.

Такий поліном визначається системою 6-и лінійних рівнянь:

$y(x_0) = y_0;$
$y'(x_0) = y'_0;$
$y''(x_0) = y''_0;$
$y(x_1) = y_1;$
$y'(x_1) = y'_1;$
$y''(x_1) = y''_1.$

Система із 6-и лінійних рівнянь розв'язується і має розв'язок тільки тоді, якщо кількість невідомих не менше і не більше 6. Поліном $y = f(x)$ має 6 коефіцієнтів тільки при 5-й степені.

Теорема доведена.

Таким чином будемо шукати поліном 5-го степеня.

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5. \quad (3)$$

Похідні будуть дорівнювати :

$$y' = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + 5fx^4 \;; \quad (4)$$

$$y'' = 2c + 6dx + 12ex^2 + 20fx^3 \,. \quad (5)$$

Підставимо в (3), (4), (5) значення координат точок $0(x_0, y_0)$ і $1(x_1, y_1)$ а також похідні в цих точках y'_0 , y''_0, y'_1 , y''_1. Будемо мати наступну систему із 6-и лінійних рівнянь

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 & x_0^5 \\ 0 & 1 & 2x_0 & 3x_0^2 & 4x_0^3 & 5x_0^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_0 & 12x_0^2 & 25x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 & x_1^5 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & 4x_1^3 & 5x_1^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_1 & 12x_1^2 & 25x_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \\ y''_0 \\ y_1 \\ y'_1 \\ y''_1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Розв'язання цієї системи дасть нам коефіцієнти a, b, c, d, e, f, які визначать поліном (3), який задовольняє поставленій задачі.

Застосування поліному не дуже зручно, крім того необхідно розв'язувати систему 6-и лінійних рівнянь.

Тому для вирішення цієї задачі візьмемо сегмент кривої Безьє 5-го степеня [2].

$$r = r_0(1-t)^5 + 5r_1(1-t)^4t + 10r_2(1-t)^3t^2 + 10r_3(1-t)^2t^3 5r_4(1-t)t^4 + r_5t^5\ . \qquad (7)$$

Перебудуємо (7) у формулу :

$$r = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + ft^5. \qquad (8)$$

В точці $r_0(x_0, y_0)$ t=0. Отримаємо :

$$a = r_0;\quad b = 5(r_1 - r_0); \qquad (9)$$

$$c = 10(r_0 - 2r_1 + r_2);\quad d = 10(r_3 + r_1 - r_0 - 3r_2); \qquad (10)$$

$$e = 5(r_0 - 4r_1 + 6r_2 - 4r_3 - r_4)\ ; \qquad (11)$$

$$f = (-r_0 + 5r_1 - 10r_2 + 10r_3 + 5r_4 + r_5)\ ; \qquad (12)$$

$$r' = b = 5(r_1 - r_0); \qquad (13)$$

$$r'' = 2c = 20(r_0 - 2r_1 + r_2). \qquad (14)$$

При заданих r_0' і r_0'' із (13) та (14) будемо мати:

$$r_1 = r_0 + \frac{r_0'}{5}\ ; \qquad (15)$$

$$r_2 = 2r_1 - r_0 + \frac{r_0''}{20}. \qquad (16)$$

В точці r_5 (t=1) будемо мати наступні рівняння:

$$r_4 = r_5 - \frac{r_5'}{5}\ ; \qquad (17)$$

$$r_3 = r_5 + 2r_4 + \frac{r_5''}{20}. \qquad (18)$$

Таким чином формули (13) – (18) повністю визначають сегмент Безьє 5-го степеня, який проходить через дві точки r_0 і r_5 із заданими першими і другими похідними в них.

Висновки. В статті отриманий результат аналітичного проектування обводу за заданим законом зміни кривини. Подальші дослідження будуть проводитися щодо розробки методів управління формою проектуємого криволінійного обводу.

Література

1. *Ефимов Н.В.* Высшая геометрия / Н.В. Ефимов– М.: Наука, 1971 – 576с.
2. *Фокс А.* Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. Пер. с англ./ А. Фокс, М. Пратт – М.:Мир, 1982 – 304с.
3. *Бадаєв Ю.І.* Керування кривиною NURBS - кривої 3 – го порядку за допомогою ваги контрольних вектор - точок. / Ю.І. Бадаєв, А.О. Блиндарук // Водний транспорт . Зб. наук. праць Київської державної академії водного трансорту.-К: КДАВТ, 2015.-№3(21) – С.103-105.

4. *Бадаєв Ю.І.* Можливості локальної модифікації гладкої NURBS – кривої // Ю.І. Бадаєв, А.О. Блиндарук // Труды XV международной научно – практической конференции “Современные информационные и электронные технологии”. Одеса, 2014.-Т.1.-С.26-27.
5. *Бадаєв Ю.І.* Компютерна реалізація проектування криволінійних обводів проектування криволінійних обводів методом NURBS - технологій вищих порядків// Ю.І. Бадаєв, А.О. Блиндарук // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць/ МДПУ. - Мелітополь, 2014.- С. 3-6.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ ПО ЗАДАННОМУ ЗАКОНУ КРИВИЗНЫ

Ю.И.Бадаев, И.М.Ганношина

Аннотация **- предлагается определение полиномиального сегмента по заданным двум точкам и первыми производными и кривизнами в этих точках.**

SIMULATION OF A FLAT CURVE TO SPECIFIED LAW CURVATURE

Y. Badayev, I. Gannoshina

Summary

Proposes a definition of polynomial segment given two points and a first derivative and curvature at these points.