УДК 514.18

ВИЗНАЧЕННЯ ПЛОЩІ СЕГМЕНТА, ОБМЕЖЕНОГО ДУГОЮ КРИВОЇ

Верещага В.М., д.т.н.,
Павленко О.М., аспірант*,
Чураков А.Я., к.т.н.,
Лебідько О.С.
Мелітопольська школа прикладної геометрії
Мелітопольський державний педагогічний університет
ім. Богдана Хмельницького
Тел. (0619) 42-42-42

Анотація **– запропоновано, за допомогою засобів БН-числення, розв'язання задачі знаходження площі сегмента, обмеженого дугою кривої при умові, що дві точки, які утворюють симплекс, знаходяться на цій кривій.**

Ключові слова **– БН-числення, площа сегменту, неперервна точкова крива.**

Постановка проблеми. У роботі [1] вперше було показано обчислення площі, обмеженою плоскою замкненою кривою, що задається точковим рівнянням [2, 3]. При цьому, обирався симплекс, у якого вершина знаходилась за межами замкненої кривої, а інші дві вершини, що визначають симплекс, обиралися серед точок, що знаходяться в середині кривої. Цікавим буде розв'язання задачі знаходження відповідної площі, коли дві (окрім вершини) точки, що визначають симплекс, будуть розташовані на кривій.

Аналіз останніх досліджень. В роботі [1] і цій статті задача знаходження площі сегмента, обмеженого дугою кривої, розглядається вперше у точковому БН-численні, розвитком якого займається Мелітопольська школа прикладної геометрії.

Формування цілей статті. Розробити спосіб для знаходження площі сегменту, обмеженого дугою плоскої кривої, заданої точковим рівнянням у симплексі, вершина якого знаходиться поза межами кривої, а дві інші точки, що визначають симплекс – на ній.

Основна частина. Нехай, у якомусь глобальному симплексі, (рис.1) визначена точковим рівнянням (1) крива *M*.

Обираємо локальний симплекс *CAB*, вершина якого *C*

* Науковий керівник – д.т.н., професор Верещага В.М.

знаходиться поза межами кривої M і обирається довільно, а дві інші A і B – на кривій M. Нехай точкове рівняння цієї кривої буде:

$$M = (A - C)\, p + (B - C)q + C, \tag{1}$$

де p і q – параметри, що являють собою у явній або неявній формі просте відношення трьох точок і визначають форму кривої.

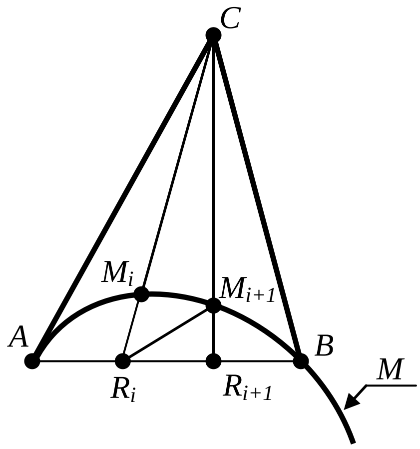

Рис. 1. Схема для визначення площі
між відрізком АВ і дугою АВ кривої М.

Для визначення точок A і B, що належать кривій M, необхідно відносно цих точок розв'язати систему двох рівнянь (2):

$$\begin{cases} M_A = Ap_A - Cp_A + Bq_A - Cq_A + C \\ M_B = Ap_B - Cp_B + Bq_B - Cq_B + C. \end{cases} \tag{2}$$

Звідки можна записати:

$$A = B\frac{q_A}{p_A} + \frac{1}{p_A}(M_A - C(1 - p_A - q_A)), \tag{3}$$

якщо прийняти $a = M_A - C(1 - p_A - q_A)$, то рівняння (3) буде мати вигляд:

$$A = B\frac{q_A}{p_A} + \frac{1}{p_A}a \cdot \tag{4}$$

Враховуючи (4), можна записати:

$$M_B = B\frac{q_A p_B}{p_A} + \frac{p_B}{p_A}a + Bq_B + C(1 - p_B - q_B).$$

Якщо ввести позначення: $b = \frac{q_A p_B}{p_A} + q_B$ та $c = M_B - a\frac{p_B}{p_A} - C(1 - p_B - q_B)$, тоді визначимо:

$$B = \frac{c}{b} = b_B \cdot \tag{5}$$

Враховуючи (5) запишемо (4):

$$A = a_A = \frac{1}{p_A}(b_{\boldsymbol{B}} q_A + a)\cdot \qquad (6)$$

З урахуванням (5) та (6) точкове рівняння (1) отримає вигляд:

$$M = (a_A - C)p + (b_B - C)q + C. \qquad (7)$$

Обираємо на кривій із (7) дві довільні точки M_i та M_{i+1}. Запишемо точкові рівняння для цих точок, що визначають їхні координати:

$$M_i = (a_A - C)p_i + (b_B - C)q_i + C, \text{ де } p_i = p(t_i);\ q_i = q(t_i); \qquad (8)$$

$$M_{i+1} = (a_A - C)p_{i+1} + (b_B - C)q_{i+1} + C, \text{ де } p_{i+1} = p(t_{i+1});$$

$$q_{i+1} = q(t_{i+1}). \qquad (9)$$

Визначимо точку R_i з простого відношення трьох точок $M_i C R_i$:

$$M_i C R_i = r_i; \rightarrow \frac{M_i - R_i}{C - R_i} = r_i;\ R_i = \frac{M_i - C r_i}{1 - r_i}, \text{ де } r_i = 1 - p_i - q_i. \qquad (10)$$

Підставляючи у (10) точкове рівняння (8), отримаємо точку R_i:

$$R_i = (a_A - C)\frac{p_i}{p_i + q_i} + (b_B - C)\frac{q_i}{p_i + q_i} + C. \qquad (11)$$

Аналогічним чином, визначимо точку R_{i+1} через просте відношення трьох точок у точковій формі:

$$R_{i+1} = \frac{M_{i+1} - C r_{i+1}}{1 - r_{i+1}}, \qquad (12)$$

знайдемо точку R_{i+1} із точкового рівняння:

$$R_{i+1} = (a_A - C)\frac{p_{i+1}}{p_{i+1} + q_{i+1}} + (b_B - C)\frac{q_{i+1}}{p_{i+1} + q_{i+1}} + C\cdot \qquad (13)$$

Площа шуканого чотирикутника $S(M_i R_i R_{i+1} M_{i+1})$ (рис.1) дорівнює сумі площ двох трикутників $S(M_i R_i M_{i+1})$ та $S(M_{i+1} R_i R_{i+1})$, тобто

$$S_{i,i+1} = \frac{ab\sin\gamma}{2(p_i + q_i)}\left(\begin{vmatrix} p_i & q_i & 1 \\ p_i & q_i & p_i + q_i \\ p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{p_{i+1} + q_{i+1}}\begin{vmatrix} p_{i+1} & q_{i+1} & 1 \\ p_i & q_i & p_i + q_i \\ p_{i+1} & q_{i+1} & p_{i+1} + q_{i+1} \end{vmatrix}\right). \qquad (14)$$

Якщо прийняти, що $\Delta_{i,i+1} = p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i$, то отримаємо формулу для обчислення площі чотирикутника (рис.1):

$$S_{i,i+1} = \frac{ab\sin\gamma}{2}\left(\frac{r_{i+1} - r_i(p_{i+1} + q_{i+1})}{(p_i + q_i)(p_{i+1} + q_{i+1})}\Delta_{i,i+1}\right), \qquad (15)$$

де $r_i = 1 - p_i - q_i$, а $r_{i+1} = 1 - p_{i+1} - q_{i+1}$.

Висновки. Багато задач прикладного характеру розв'язуються через використання площ, обмежених дугою кривої лінії, тому запропонований тут спосіб має особливе значення. Треба зауважити, що чим менший крок між *i*-ю та *(i+1)*-ю точками, тим точніше буде визначено площу трикутника.

Література

1. *Верещага В.М.* Визначення площі, обмеженої топографічною замкненою плоскою кривою /В.М. Верещага, Є.В. Конопацький, О.М. Павленко // Науковий журнал: комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. – 2015 (*подано до друку*)
2. *Найдыш В.М.* Алгебра БН-исчисления /В.М. Найдыш, И.Г. Балюба, В.М. Верещага // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-технічний збірник. Вип. 90. – К. КНУБА, 2012. – С. 210-215.
3. *Балюба И.Г.* Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: дис….докт.техн.наук: 05.01.01 / Иван Григорьевич Балюба – Макеевка: МИСИ, 1995. – 227с.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ СЕГМЕНТА, ОГРАНИЧЕННОГО ДУГОЙ КРИВОЙ

В.М. Верещага, А.М. Павленко, А.Я. Чураков, А.С. Лебедько

Аннотация **– предложено, с помощью средств точечного БН-исчисления, решение задачи нахождения площади сегмента, ограниченного дугой кривой при условии, что две точки, которые образуют симплекс, находятся на этой кривой.**

DETERMINING THE AREA OF THE SEGMENT BOUNDED BY ARC CURVE

V. Vereschaga, A. Pavlenko, A. Churakov, A. Lebedko

Summary

Suggested by means of a point-BN calculus solution of finding the square segment bounded by the arc of the curve, provided that the two points which form simplex located on this curve.