УДК 514.18

ТЕОРЕМА КЛЕРО ДЛЯ ПОБУДОВИ ГЕОДЕЗИЧНИХ ЛІНІЙ У ФУНКЦІЇ ДОВЖИНИ ДУГИ НА ПОВЕРХНЯХ ОБЕРТАННЯ

Кремець Я.С., аспірант *
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ)
Тел. (044) 527-82-26

Анотація **– на основі теореми Клеро отримано нові залежності для побудови геодезичних ліній на поверхнях обертання. Незалежною змінною є довжина дуги цих ліній. Достовірність отриманих результатів перевірено на конусі. Для побудови геодезичних ліній у різному напрямі використано розгортку конуса, на якій ці лінії є прямими.**

Ключові слова **– геодезичні лінії, поверхня обертання, теорема Клеро, довжина дуги, система диференціальних рівнянь.**

Постановка проблеми. Пошук геодезичних ліній на поверхнях в цілому зводиться до складання диференціальних рівнянь другого порядку, до інтегрування яких потрібно застосовувати чисельні методи. Тільки для окремих поверхонь (поверхні обертання, поверхні Ліувілля) порядок диференціального рівняння може бути понижений до першого і звестися до інтегрування виразів [1], які знову ж таки рідко можуть бути проінтегровані. Для поверхонь обертання таким виразом для інтегрування є вираз на основі теореми Клеро, який встановлює взаємозв'язок між внутрішніми координатами поверхні у вигляді $v=v(u)$, де v – кут повороту точки геодезичної лінії навколо осі обертання поверхні. Проте і в цьому випадку геодезичні лінії в повному обсязі побудувати не завжди вдається, оскільки при зміні параметра u, який є незалежним при побудові геодезичної лінії, поступово охоплюється вся поверхня, наприклад, знизу до верху. Але в нижній або верхній частинах поверхні геодезичної лінії із заданим напрямом немає, вона в певній точці торкається до певної паралелі і повертається в протилежну сторону. Незалежна змінна u не може в певній точці почати зменшуватися, вона тільки монотонно зростає. Таким чином, за теоремою Клеро можуть бути побудовані тільки окремі фрагменти геодезичних ліній.

---

* Науковий керівник – д.т.н., професор Пилипака С.Ф.

Аналіз останніх досліджень. Якщо поверхні обертання виготовляти із композитних матеріалів, армованих нитками, то нитки необхідно намотувати саме по геодезичних лініях [2,3]. Крім того, при проектуванні деяких робочих органів (зокрема, ґрунтообробних), враховують розташування геодезичних ліній на їх поверхні, оскільки частинки технологічного матеріалу при примусовому їх русі по робочому органу намагаються рухатися саме по лініях, близьких до геодезичних, особливо при високих швидкостях переміщення [4,5]. Враховуючи практичне значення геодезичних ліній, їх знаходженням і побудовою займалися різні дослідники [6,7].

Формулювання цілей статті. Скласти диференціальні рівняння геодезичних ліній у функції довжини власної дуги для поверхонь обертання.

Основна частина. Якщо поверхня обертання задана параметричними рівняннями у формі:

$$X = \varphi \cos v; \qquad Y = \varphi \sin v; \qquad Z = \psi, \tag{1}$$

де $\varphi=\varphi(u)$; $\psi=\psi(u)$ – параметричні рівняння меридіана, то згідно теореми Клеро внутрішнє рівняння геодезичної лінії у формі $v=v(u)$ описується інтегралом:

$$v = c\int \frac{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}{\varphi\sqrt{\varphi^2 - c^2}} du, \tag{2}$$

де c – стала, від якої залежить напрям геодезичної лінії в конкретній точці при заданих значеннях внутрішніх координат u і v.

Вираз (2) зв’язує внутрішні координати поверхні залежністю $v=v(u)$. Однак зв'язок між внутрішніми координатами можна задати по іншому – за допомогою нової незалежної змінної – довжини дуги геодезичної лінії, тобто у вигляді $v=v(s)$ і $u=u(s)$. Після диференціювання вираз (2) набуває вигляду:

$$\frac{dv}{du} = \frac{c}{\varphi}\sqrt{\frac{\varphi'^2 + \psi'^2}{\varphi^2 - c^2}}\,. \tag{3}$$

Оскільки $v=v(s)$ і $u=u(s)$, то можна записати $\frac{dv}{du} = \frac{dv}{ds} : \frac{du}{ds} = \frac{v'}{u'}$. Підставивши отриманий вираз у (3), одержимо:

$$v' = \frac{u'c}{\varphi}\sqrt{\frac{\varphi_u'^2 + \psi_u'^2}{\varphi^2 - c^2}}\,. \tag{4}$$

Мається на увазі, що у виразі (4) v' і u' є похідними по змінній s, а φ' і ψ' – по змінній u, для чого цю змінну використано у нижньому індексі. Диференціальним рівнянням (4) не можна скористатися, оскільки до нього входять дві невідомі функції: $v=v(s)$ і $u=u(s)$. Отже для їх знаходження потрібно мати ще одне рівняння. Цим рівнянням може бути відома тотожність для кривої, заданої у функції довжини дуги s: $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$. Знайдемо перші похідні рівнянь (1) по змінній s (при цьому прописні літери в рівняннях (1) замінимо на строчні, оскільки в першому випадку рівняння описують поверхню, а в другому – лінію на ній):

$$\begin{aligned} x' &= u'\varphi'_u \cos v - v'\varphi \sin v; \\ y' &= u'\varphi'_u \sin v + v'\varphi \cos v; \\ z' &= u'\psi'_u . \end{aligned} \tag{5}$$

Після підстановки в наведену тотожність похідних (5) отримаємо:

$$v'^2\varphi^2 + u'^2\left(\varphi_u'^2 + \psi_u'^2\right) = 1. \tag{6}$$

Розв'яжемо (6) відносно u':

$$u' = \sqrt{\frac{1 - v'^2\varphi^2}{\varphi_u'^2 + \psi_u'^2}} . \tag{7}$$

Тепер ми маємо два рівняння (4) і (7) із двома невідомими функціями. Підставимо (7) в (4) і після спрощень отримаємо просту залежність:

$$v' = \frac{dv}{ds} = \frac{c}{\varphi^2} . \tag{8}$$

Після підстановки (8) у (7) будемо мати:

$$u' = \frac{du}{ds} = \frac{1}{\varphi}\sqrt{\frac{\varphi^2 - c^2}{\varphi_u'^2 + \psi_u'^2}} . \tag{9}$$

Після розділення змінних у (9) остаточно отримаємо:

$$s = \int \varphi \sqrt{\frac{\varphi_u'^2 + \psi_u'^2}{\varphi^2 - c^2}} du . \tag{10}$$

До інтеграла (10) входять вирази, що задають меридіан, та їх похідні, які є функціями змінної u. Якщо його вдасться проінтегрувати, то ми отримаємо залежність $s=s(u)$. Наступний етап – з отриманої залежності знайти обернену $u=u(s)$. Після цього потрібно залежність $u=u(s)$ підставити у функцію $\varphi(u)$, після чого отримаємо $\varphi(s)$. І останній етап – знаходження залежності $v=v(s)$ за формулою (8), яку теж можна записати у вигляді інтеграла:

$$v = c\int \frac{ds}{\varphi^2[u(s)]} . \tag{11}$$

Отримані вирази рідко вдається проінтегрувати. Їх можна використовувати для побудови геодезичних ліній чисельними методами. Аналітичні вирази в кінцевому вигляді вдається отримати тільки для найпростіших поверхонь обертання.

Розглянемо наступний приклад. Візьмемо конус, параметричні рівняння меридіана якого мають наступний вигляд [8]:

$$\varphi = e^{u\cos\beta}; \qquad \psi = e^{u\cos\beta}\operatorname{tg}\beta, \tag{12}$$

де β – кут нахилу прямолінійних твірних конуса до основи.

Запишемо похідні рівнянь (12):

$$\varphi'_u = e^{u\cos\beta}\cos\beta; \qquad \psi'_u = e^{u\cos\beta}\sin\beta. \tag{13}$$

Підставляємо (12), (13) в (10) і отримуємо:

$$s = \int \frac{e^{2u\cos\beta}ds}{\sqrt{e^{2u\cos\beta} - c^2}} = \frac{1}{\cos\beta}\sqrt{e^{2u\cos\beta} - c^2} + c_1, \tag{14}$$

де c_1 – стала інтегрування.

Розв'язуємо (14) відносно u (при $c_1=0$):

$$u = \frac{1}{\cos\beta}\log\sqrt{c^2 + s^2\cos^2\beta}. \tag{15}$$

Підставляємо (15) у перший вираз (12) і отримаємо залежність $\varphi(s)$: $\varphi = \sqrt{c^2 + s^2\cos^2\beta}$. За формулою (11) знаходимо залежність $v=v(s)$:

$$v = c\int \frac{ds}{c^2 + s^2\cos^2\beta} = \frac{1}{\cos\beta}\operatorname{arctg}\left(\frac{s\cos\beta}{c}\right). \tag{16}$$

Рівняння (15), (16) є внутрішніми рівняннями геодезичних ліній на конусі, напрям яких залежить від сталої c. Щоб перевірити достовірність отриманих результатів, скористаємося відомою формулою (2):

$$v = c\int \frac{du}{\sqrt{e^{2u\cos\beta} - c^2}} = \frac{1}{\cos\beta}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{e^{2u\cos\beta} - c^2}}{c}\right). \tag{17}$$

Якщо в (1) підставити рівняння меридіана (12) та залежність $v=v(u)$ із (17), то ми отримаємо параметричні рівняння геодезичної лінії. Її довжину s можна знайти за відомою формулою інтегруванням кореня квадратного із суми квадратів похідних параметричних рівнянь. В загальному вигляді при $v=v(u)$ ця формула приймає вигляд:

$$s = \int \sqrt{\varphi_u'^2 + \psi_u'^2 + \varphi^2 v_u'^2}\,du. \tag{18}$$

Якщо у (18) підставити вирази із (12), (13) і похідну v' із (17) (підінтегральний вираз), то ми отримаємо точно такий же інтеграл, як (14). Це свідчить про те, що формули (10), (11) вірні.

При вимозі, щоб всі геодезичні лінії виходили із однієї точки в різних напрямах в залежності від значення сталої c при $s=0$, необхідно знайти значення сталої інтегрування c_1 в (14) при заданій початковій координаті u_0 на поверхні конуса:

$$c_1 = -\frac{1}{\cos\beta}\sqrt{e^{2u_0\cos\beta} - c^2}. \tag{19}$$

Після цього вираз (15) набуває досить громіздкого вигляду:

$$u = \frac{1}{\cos\beta}\log\sqrt{c^2 + \left(s\cos\beta + \sqrt{e^{2u_0\cos\beta} - c^2}\right)^2}\,. \qquad (20)$$

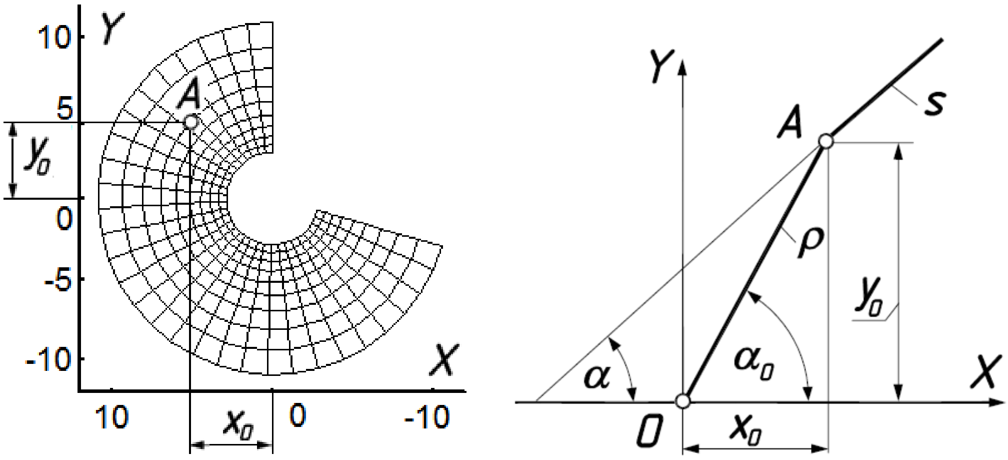
Аналізуючи вираз (20), можна зробити висновок, що у внутрішньому підкореневому виразі стоїть різниця сталих. Це означає, що на значення сталої c накладено обмеження, тобто не в кожному напрямі можна побудувати геодезичну лінію.

Отже, побудова геодезичних ліній за знайденими залежностями на основі теореми Клеро не може бути здійснена в повному обсязі. Проте, цю перешкоду можна подолати для розгортних поверхонь, якщо відомі параметричні рівняння розгортки. Геодезичні лінії на розгортці перетворюються у прямі. Отже, можна в оберненому порядку побудувати пучок прямих на розгортці, які на поверхні перетворяться в геодезичні лінії, що виходять із заданої точки в різних напрямах. Розглянемо це на прикладі конуса.

Параметричні рівняння розгортки конуса із меридіаном у формі (12) мають вигляд:

$$X_p = \frac{e^{u\cos\beta}}{\cos\beta}\cos(v\cos\beta); \qquad Y_p = \frac{e^{u\cos\beta}}{\cos\beta}\sin(v\cos\beta)\,. \qquad (21)$$

Якщо знайти першу квадратичну форму розгортки (21) і конуса (1) із меридіаном (12), то можна переконатися, що вони однакові. На рис. 1,а за рівняннями (21) побудована розгортка конуса при $\beta=45^0$. Нехай в точці A з координатами x_0 і y_0 потрібно провести пряму лінію, яка на конусі буде геодезичною. Розглянемо цю точку в системі координат OXY окремо (рис. 1,б).



а б

Рис.1. До визначення точки A на розгортці конуса, через яку потрібно провести пряму лінію із заданим напрямом:

а) точка A на розгортці із заданими координатами x_0=5 і y_0=5;

б) визначення координат x_0 і y_0 через відстань ρ і кут α_0 та напряму прямої лінії s через кут α.

Параметричні рівняння прямої s (причому s – це довжина прямої – незалежна змінна) запишуться:

$$x = x_0 + s\cos\alpha; \qquad y = y_0 + s\sin\alpha, \tag{22}$$

де α – кут, який задає напрям прямої.

Із врахуванням, що $x_0 = \rho\cos\alpha_0$; $y_0 = \rho\sin\alpha_0$ рівняння прямої (22) запишуться:

$$x = \rho\cos\alpha_0 + s\cos\alpha; \qquad y = \rho\sin\alpha_0 + s\sin\alpha. \tag{23}$$

Щоб побудувати пряму (23) на розгортці конуса (21), потрібно знайти її внутрішнє рівняння у вигляді $v=v(s)$ і $u=u(s)$. Для цього прирівняємо між собою відповідні координати точки рівнянь (21) і (23):

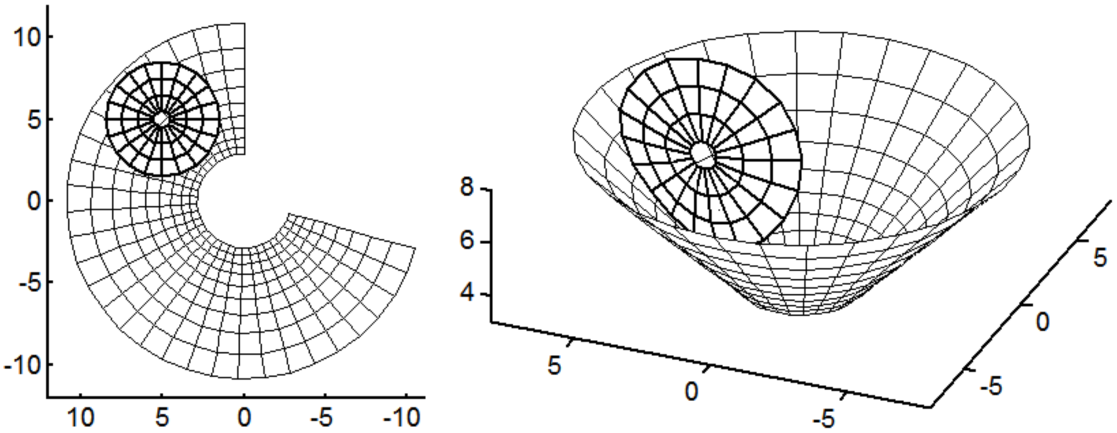
$$\begin{gathered}\rho\cos\alpha_0 + s\cos\alpha = \frac{e^{u\cos\beta}}{\cos\beta}\cos(v\cos\beta);\\ \rho\sin\alpha_0 + s\sin\alpha = \frac{e^{u\cos\beta}}{\cos\beta}\sin(v\cos\beta).\end{gathered} \tag{24}$$

Роз’вяжемо систему рівнянь (24) відносно v і u:

$$\begin{gathered}v = \frac{1}{\cos\beta}\operatorname{arctg}\left(\frac{\rho\sin\alpha_0 + s\sin\alpha}{\rho\cos\alpha_0 + s\cos\alpha}\right);\\ u = \frac{1}{\cos\beta}\ln\left(\cos\beta\sqrt{\rho^2 + s^2 + 2\rho s\cos(\alpha - \alpha_0)}\right).\end{gathered} \tag{25}$$

При підстановці виразів (25) при заданих значеннях сталих β ρ, α_0, α у рівняння розгортки (21) ми отримаємо відповідну пряму лінію по відношенню до криволінійних координат розгортки. При підстановці цих же внутрішніх рівнянь у параметричні рівняння конуса отримаємо відповідну геодезичну лінію на його поверхні.

При побудові прямих ліній на розгортці конуса з різним значенням кута α при зміні s від нуля до заданої величини кінці відрізків будуть лежать на колі. Якщо у виразах (25) кут α зробити другою незалежною змінною, то при підстановці у (21) ми отримаємо другу ортогональну координатну сітку, однією сім’єю координатних ліній якої є прямі, а другою – концентричні кола (рис. 2,а). На поверхні конуса прямі перетворюються у геодезичні лінії, а кола – у криві сталої геодезичної кривини. Це випливає із того, що геодезична кривина кривої не змінюється при згинанні поверхні і переходить у повну кривину на розгортці, тобто, у кривину кола для нашого випадку. Така система координат на поверхні носить назву напівгеодезичної [1]. Сім’я кривих сталої геодезичної кривини (у нашому випадку – сім’я концентричних кіл) називається колами Дарбу. В загальному випадку вони можуть бути незамкненими (наприклад, гвинтова лінія на поверхні розгортного гелікоїда).



а б

Рис.2. Конус із пучком геодезичних ліній та кіл Дарбу на ньому:
а) розгортка конуса; б) конус в аксонометрії.

При $\rho=0$ в рівняннях (25) пучком геодезичних стають прямолінійні твірні конуса, а колами Дарбу – його паралелі.

Висновки. Отримані інтеграли (10) і (11) є модифікацією теореми Клеро для відшукання геодезичних ліній на поверхнях обертання у функції довжини власної дуги за заданими рівняннями меридіану. Вони дають можливість побудувати пучок геодезичних ліній із заданої точки на поверхні в різних напрямах з однаковою довжиною. Із-за специфіки інтегралів побудова ліній в деяких напрямах може бути ускладнена. Цю перешкоду можна подолати для розгортної поверхні, якщо відомі параметричні рівняння її розгортки. Для цього в оберненому порядку знаходиться пучок прямих ліній та концентричних кіл на розгортці, якому відповідає пучок геодезичних ліній та кіл Дарбу на поверхні.

Література

1. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов – М.: «НАУКА», 1969. – 176 с.
2. *Завидский А. В.* Определение параметров технологической поверхности, обеспечивающей непрерывность намотки по геодезическим линиям / А.В. Завидский // Труды МАИ. 1976. - № 349. - С. 34-35.
3. *Якунин В.И.* Вопросы геометрического проектирования процесса намотки составной поверхности / В.И. Якунин, В.А. Калинин, Т.В. Аюшев // Компьютерная геометрия и графика в инженерном образовании: Материалы всесоюзной конференции. - Нижний Новгород, 1991. - С. 149.
4. *Войтюк Д.Г.* Побудова геодезичних ліній, як граничних траєкторій руху матеріальних частинок по поверхні / Д.Г. Войтюк, С.Ф. Пилипака // Науковий вісник Національного аграрного університету. –К.: НАУ, 2003. –Вип. 60. –С. 138-141.

5. *Юрчук В.П.* Проектування поверхні роторного копача шляхом використання геодезичної лінії / В.П. Юрчук, О.Г. Гетьман // Труды Таврической государственной агротехнической академии. Вып.4. Прикл. геометрия и инж. графика. - Т.6. – Мелитополь: ТГАТА, 1999. – С. 85 – 88.
6. *Пилипака С.Ф.* Дослідження геодезичних ліній на поверхні гвинтового коноїда / С.Ф. Пилипака, Т.В. Гнітецька // Сучасні проблеми геометричного моделювання. Матеріали міжнародної науково-практичної конференції. – Львів: Національний університет ”Львівська політехніка”, 2003. –С. 77 - 80.
7. *Урмаев Н.А.* Приведенная длина геодезической линии / Н.А. Урмаев // Известия АН СССР. - Сер. матем., 5:4-5 (1941). – С. 369–376.
8. *Кремець Т.С.* Конформне відображення написів на ізометричні сітки конуса та кулі / Т.С. Кремець // Технічна естетика і дизайн. – К.: Віпол, 2011. – Вип. 9. – С. 112 – 117.

ТЕОРЕМА КЛЕРО ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ КАК ФУНКЦИИ ДЛИНЫ ДУГИ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ

Я.С. Кремец

Аннотация **– на основании теоремы Клеро получены новые зависимости для построения геодезических линий на поверхностях вращения. Независимой переменной является длина дуги этих линий. Достоверность полученных результатов проверено на конусе. Для построения геодезических линий в различных направлениях использовано развертку конуса, на которой эти линии являются прямыми.**

THE THEOREM OF CLAIRAUT FOR CONSTRUCTION OF GEODETIC LINES AT FUNCTION OF LENGTH OF THE ARC ON SURFACE OF REVOLUTIONS

Ya. Kremetz

Summary

On the basis of the theorem of Clairaut new associations for construction of geodetic lines on surface of revolutions are gained. An explanatory variable is the length of an arc of these lines. Reliability of the gained outcomes it is mustered on a cone. For construction of geodetic lines in various directions it is used cone development on which these lines are straight lines.