УДК 514.18

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ ОДНОМЕРНОГО ОБВОДА ЧЕРЕЗ *k* НАПЕРЕД ЗАДАННЫХ ТОЧЕК В БН-ИСЧИСЛЕНИИ

Крысько А.А., *
Конопацкий Е.В., к.т.н.,
Мелитопольская школа прикладной геометрии
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры (г. Макеевка)
Чураков А.Я., к.т.н.
Мелитопольский педагогический университет им. Б. Хмельницкого
Тел. (062) 322-24-67

***Аннотация* – в работе предложены геометрические основы конструирования одномерных выпуклых обводов через *k* наперед заданных точек в БН-исчислении, которые используются для геометрического моделирования действительной поверхности тонкостенных оболочек технических форм.**

***Ключевые слова* – выпуклый обвод, дуга обвода, касательная, БН-исчисление, точечное уравнение.**

Постановка проблемы. Во время транспортировки, монтажа и эксплуатации на тонкостенные оболочки инженерных сооружений влияют объективные и субъективные факторы, изменяя ее первичную геометрическую форму. Для учета несовершенств геометрической формы при расчете на прочность и устойчивость такой оболочки, необходимо аналитическое описание её действительной поверхности.

С геометрической точки зрения, модель действительной поверхности тонкостенной оболочки инженерного сооружения – это замкнутый сегмент поверхности, который образован дугами выпуклых обводов первого порядка гладкости. Это приводит к необходимости разработки геометрических основ для создания алгоритмов конструирования одномерных выпуклых обводов через *k* наперед заданных точек.

Анализ последних исследований. Исследованиям в области конструирования выпуклых обводов было посвящено большое количество исследований, например [1-4], в которых были рассмотрены случаи конструирования обводов с порядком гладкости и чем выше первый. Однако все эти исследования велись в рамках тех

---
* Научный руководитель – к.т.н., доцент Конопацкий Е.В.

математических аппаратов, которые использовались при решении конкретных практических задач. В нашем случае, для моделирования действительной поверхности тонкостенных оболочек технических форм используется метод подвижного симплекса, разработанный на основе математического аппарата БН-исчисление [1]. Поэтому для решения поставленной задачи необходимо разработать алгоритмы конструирования выпуклых обводов первого порядка гладкости именно в рамках БН-исчисления. Стоит отметить, что использование обводов более высоких порядков гладкости не требуется для решения данной конкретной задачи и только приведёт к неоправданному усложнению расчётного алгоритма.

Геометрические основы конструирования одномерных и двумерных обводов в БН-исчислении были разработаны в [1]. Но в этой работе не были учтены особенности задания касательных и, соответственно, формирования дуг обвода, на первом и последнем участках.

Формулирование целей статьи. Разработать геометрические основы конструирования одномерного обвода через k наперед заданных точек в БН-исчислении с учётом особенностей формирования дуг обвода на первом и последнем участках.

Основная часть. Пусть задано k точек n-мерного пространства (рис. 1): $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_i \ldots, A_k$. Требуется через эти точки провести кривую линию. Этой кривой линией в нашем случае будет одномерный выпуклый обвод первого порядка гладкости. Главное требование, которое предъявляется к обводу, состоит в том, чтобы он не допускал непредвиденных осцилляций.

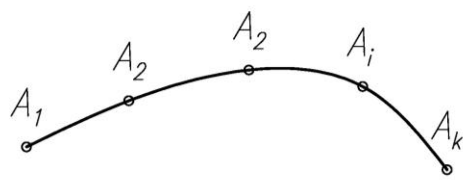

Рис. 1. Выпуклый обвод, построенный через k точек.

Отметим, что конструируемый обвод, в общем случае, будет состоять из дуг двоякой кривизны. Выделим, какими свойствами должна обладать такая дуга:

1. Она не должна содержать изломов. Другими словами, дуга обвода должна на интервале [0,1] иметь единственную касательную в каждой точке. Аналитически это достигается тем, что точечное уравнение дуги имеет определенные на отрезке функции, хотя бы один раз дифференцируемые.

2. Дуга не должна иметь точек самопересечения (узловых точек).

3. Алгоритм обвода должен обладать универсальностью по отношению к размерности пространства. Т.е. он должен сохранять все свои свойства, как для трёхмерного, так и для двухмерного пространства. Это требование делает более жёсткими ограничения на

дугу обвода двоякой кривизны. Дуга обвода должна быть такой, чтобы плоский ее вариант не имел точек перегиба (рис. 2,а) или в случае (рис. 2,б) когда направления касательных A_1B_1 и A_2C_2 не позволяет избежать точки перегиба, то такой точки не должно быть больше одной.

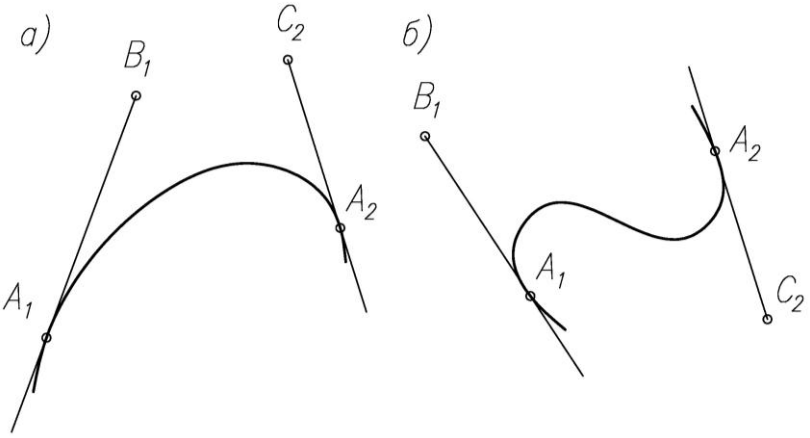

Рис. 2. Дуги обвода при различных направлениях касательных.

Профессором Балюбой в [1] исследовано, что дуга обвода будет заведомо обладать свойствами 2 и 3, если на алгоритм налагается следующее условие:

$$\left|A_1A_2\right| = \left|A_1B_1\right| + \left|A_2C_2\right|. \tag{1}$$

Это же условие позволяет выполнить требование к дуге, которое не редко накладывают на обвод при конструировании поверхностей технических форм. Встречающиеся на практике линии, довольно часто, включают в себя прямолинейные участки. Отсюда еще одно свойство, которому должна отвечать идеальная дуга обвода:

4. Обвод должен работать с теми же параметрами и в случае, когда дуга обвода вырождается в отрезок прямой линии.

Этими свойствами могут обладать дуги обвода полученные на базе кривых трех отношений [1]. Используем для построения обвода простейшую дугу обвода двоякой кривизны третьего порядка:

$$M = A_i\bar{t}^3 + 3B_i\bar{t}^2t + 3C_{i+1}\bar{t}t^2 + A_{i+1}t^3, \tag{2}$$

где A_i, A_{i+1} – начало и конец дуги обвода;

A_iB_i – касательная к дуге в точке A_i;

$A_{i+1}C_{i+1}$ – касательная к дуге в точке A_{i+1};

$0 \le t \le 1$ – параметр точечного уравнения;

$\bar{t} = 1 - t$ – дополнение параметра до единицы.

Для формирования обвода через k точек A_i, с помощью дуги (2.2), требуется определить точки B_i и C_{i+1} так чтобы дуга (2.2) на [0,1] не имела особых точек. Второе требование к выбору B_i, C_{i+1}, заключается в том, чтобы выбор касательных не создавал непредвиденных точек перегиба на дуге A_i, A_{i+1}. Другими словами, обвод из заданных точек должен быть выпуклым.

Выбор касательных в заданных точках A_i разобьем на два этапа:

1. Подобрать касательные во внутренних точках обвода.
2. Подобрать касательные в начальной точке A_1 и конечной точке A_k.

Приступаем к первому этапу решения задачи. Заданы точки A_i, A_{i+1}, A_{i+2}, требуется определить точки B_{i+1}, C_{i+1}, фиксирующие касательные смежных дуг обвода (рис. 3). В [1] было отмечено, что две смежные дуги обвода будут выпуклыми, если касательная в $A_{i+1}B_{i+1}$ будет параллельна A_iA_{i+2}. Такую прямую определим точками B'_{i+1} и C'_{i+1}. Естественно, что $B'_{i+1}, C'_{i+1}, A_{i+1}$ лежат на одной прямой и для определения такой прямой достаточно двух точек: A_{i+1} и одной из точек B'_{i+1} или C'_{i+1}. Мы определим B'_{i+1} и C'_{i+1} так чтобы создать симметрию точечных уравнений обвода. Точки B'_{i+1} и C'_{i+1} определим из двух параллелограммов $A_iA_{i+2}C'_{i+1}A_{i+1}$ и $A_{i+2}A_iB'_{i+1}A_{i+1}$. Используя точечное уравнение параллельного переноса, получим:

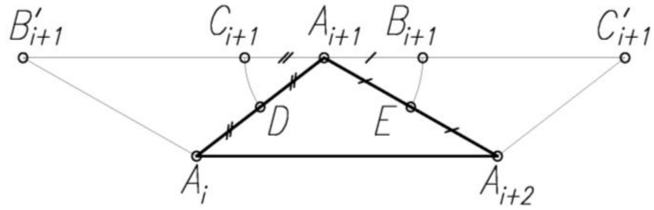

Рис. 3. Построение касательной в точке A_{i+1}.

$$B'_{i+1} = A_i + A_{i+1} - A_{i+2}. \tag{3}$$

$$C'_{i+1} = A_{i+1} + A_{i+2} - A_i. \tag{4}$$

Точки B'_{i+1} и C'_{i+1} определяют касательную в точке A_{i+1}, но точечное уравнение дуги обвода (2) предполагает наличие на касательных точек B_i и C_{i+1}, формирующих вид дуги обвода (рис. 4).

Можно было бы взять в качестве формирующих точки B'_{i+1} и C'_{i+1}. Однако эти точки заведомо рождают на дуге нежелательную, особую точку первого рода, если касательные лежат в одной плоскости, и допустимую, но тоже не очень нужную, двоякую кривизну, когда касательные скрещиваются. Может оказаться, что оптимальный вариант дуги

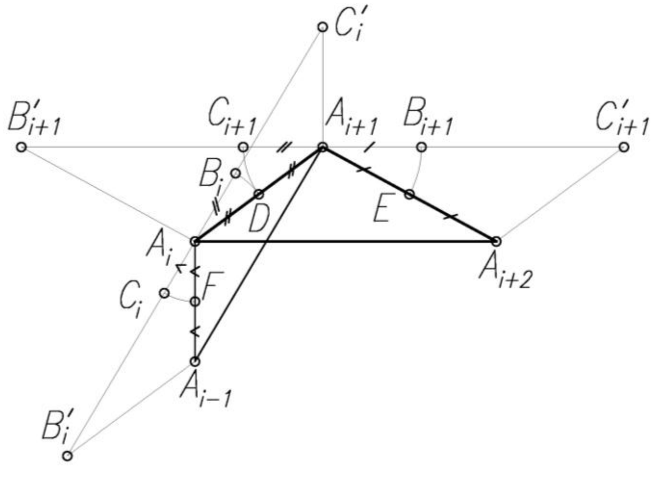

Рис. 4. Подбор касательных во внутренних точках обвода.

A_iA_{i+1} это хорда A_iA_{i+1}. Подберем оптимальный алгоритм нахождения точек B_i и C_{i+1}, обеспе-чивающий требуемую дугу обвода при всех вариантах задания A_iA_{i+1}:

1. Точки B_i, C_{i+1} совпадают, когда дуга превращается в хорду.

2. Во всех остальных случаях отрезки касательных A_iB_i и $A_{i+1}C_{i+1}$ не могут пересекаться, что не позволит появиться особой точке на дуге обвода.

Этого можно достичь, если точки B_{i+1} и C_{i+1} будут принадлежать прямой $B'_{i+1}C'_{i+1}$ и выполняются условия:

$$\left|A_{i+1}B_{i+1}\right| = \frac{\left|A_{i+1}A_{i+2}\right|}{2}; \qquad \left|A_{i+1}C_{i+1}\right| = \frac{\left|A_iA_{i+1}\right|}{2}. \tag{5}$$

Определяем искомые точки:

$$\frac{\left|A_{i+1}B_{i+1}\right|}{\left|A_{i+1}C'_{i+1}\right|} = \frac{\left|A_{i+1}A_{i+2}\right|}{2\left|A_iA_{i+2}\right|} = \frac{A_{i+1}B_{i+1}}{A_{i+1}C'_{i+1}} \Rightarrow B_{i+1} = \left(C'_{i+1} - A_{i+1}\right)\frac{\left|A_{i+1}A_{i+2}\right|}{2\left|A_iA_{i+2}\right|} + A_{i+1}.$$

Далее, учитывая (4), получим:

$$B_{i+1} = \left(A_{i+2} - A_i\right)\frac{\left|A_{i+1}A_{i+2}\right|}{2\left|A_iA_{i+2}\right|} + A_{i+1}. \tag{6}$$

Аналогично, с учётом (3), определяем C_{i+1}:

$$C_{i+1} = \left(A_i - A_{i+2}\right)\frac{\left|A_iA_{i+1}\right|}{2\left|A_iA_{i+2}\right|} + A_{i+1}. \tag{7}$$

На втором этапе необходимо определить касательные в крайних точках обвода. Возможны различные способы задания касательных.

В данной работе предлагается использовать для построения обвода дугу обвода 2-го порядка.

$$M_1 = A_1\bar{t}^2 + 2C_2t\bar{t} + A_2t^2. \tag{8}$$

$$M_k = A_{k-1}\bar{t}^2 + 2B_{k-1}t\bar{t} + A_kt^2. \tag{9}$$

В этом случае касательная в точке A_1 задается точкой C_2, а касательная в точке A_k задается точкой B_{k-1}.

Исходя из уравнений (6,7) определим точки C_2 и B_{k-1}:

$$C_2 = \left(A_1 - A_3\right)\frac{\left|A_1A_2\right|}{2\left|A_1A_3\right|} + A_2. \tag{10}$$

$$B_{k-1} = \left(A_k - A_{k-2}\right)\frac{\left|A_{k-1}A_k\right|}{2\left|A_{k-2}A_k\right|} + A_{k-1}. \tag{11}$$

При создании алгоритма конструирования обода следует учесть, что точки C_2 и B_{k-1} определяются с помощью уравнений (6,7) при соответствующем значении i.

Выводы. В работе определены касательные и, с их помощью, получены точечные уравнения дуг обвода 2-го и 3-го порядков с учётом особенностей формирования дуг на первом и последнем участках обвода, что является геометрической основой для создания алгоритмов конструирования выпуклых обводов первого порядка гладкости, что, в свою очередь, позволяет их использовать для моделирования действительной поверхности тонкостенных оболочек инженерных сооружений в БН-исчислении.

Литература

1. *Балюба И.Г.* Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: дисс…доктора техн. наук: 05.01.01 / Балюба Иван Григорьевич – Макеевка: МИСИ, 1995. – 227 с.
2. *Найдыш В.М.* Методы и алгоритмы формирования поверхностей и обводов по заданным дифференциально-геометрическим условиям: автореф. дис. на соискание науч. степени доктора техн. наук: 05.01.01 / Найдыш Владимир Михайлович. – М., 1983. – 33 с.
3. *Гавриленко Е.А.* Дискретное интерполирование плоских одномерных обводов с закономерным изменением кривизны: автореф. дис. на соискание науч. степени канд. техн. наук: 05.01.01 / Гавриленко Евгений Андреевич. – Мелитополь, 2004. – 17 с.
4. *Ванін І.В.* Геометричне моделювання крила літака на стадії ескізного проектування з використанням кривих Безьє третього порядку // І.В.Ванін, Г.А. Вірченко / Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці Таврійської державної агротехнічної академії – Вип.4, Т.31. – Мелітополь: ТДАТА, 2006. – С.89-95.

ГЕОМЕТРИЧНІ ОСНОВИ КОНСТРУЮВАННЯ ОДНОМІРНОГО ОБВОДУ ЧЕРЕЗ *k* НАПЕРЕД ЗАДАНИХ ТОЧОК У БН-ЧИСЛЕННІ

А.А. Крисько, Є.В. Конопацький, А.Я. Чураков

***Анотація* – в роботі запропоновані геометричні основи конструювання одномірного опуклого обводу через *k* наперед заданих точок у БН-численні, які використовуються для геометричного моделювання дійсної поверхні тонкостінних оболонок технічних форм.**

GEOMETRIC DESIGN BASICS OF ONE-DIMENSIONAL CONTOURS BY *k* PRESCRIBED POINTS IN BN-CALCULATION

A. Krysko, E. Konopatskiy, A. Churakov

Summary

In work proposed a geometric design principles a one-dimensional convex contours through the *k* prescribed points in the BN-calculation, which are used for geometric modeling of the real surface of thin-walled shells technical forms.