УДК. 514.18

ГЕОМЕТРИЧНИЙ АПАРАТ СУПЕРПОЗИЦІЙ ТА РЕКУРЕНТНІ ФОРМУЛИ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ У ДИСКРЕТНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБРАЗІВ

Воронцов О.В., к.т.н.
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка (Полтава)
Тел. 095-092-30-89

***Анотація* — у статті розглянуті питання аналізу можливостей використання геометричного апарату суперпозицій у поєднанні із рекурентними формулами числових послідовностей для дискретного моделювання геометричних образів за відповідними вихідними даними.**

***Ключові слова* — геометричний апарат суперпозицій, математичний апарат числових послідовностей, суперпозиції точкових множин, рекурентні формули числових послідовностей.**

Постановка проблеми. Залучення геометричного апарату суперпозицій і математичного апарату числових послідовностей для формування дискретно визначених геометричних образів (ДВГО) значно розширює можливості дискретного геометричного моделювання об’єктів, процесів та явищ. Оскільки далеко не всі числові послідовності є дискретними аналогами неперервних аналітичних залежностей, що визначають відповідні геометричні образи, тому актуальною вбачається проблема вивчення можливостей використання суперпозицій точкових множин нескінченних числових послідовностей для дискретного моделювання неперервних геометричних образів.

Аналіз останніх досліджень. Приклади використання рекурентних формул нескінченних числових послідовностей з позиції їх придатності для дискретного визначення неперервних геометричних образів різної вимірності викладені у статті [1]. Використанню математичного апарату числових послідовностей у дискретному геометричному моделюванні присвячена робота [2]. У статтях [3-5] автора даної статті проведено дослідження властивостей та узагальнення переходу від неперервних залежностей до рекурентних формул задання дискретних числових послідовностей шляхом заміни дискретними неперервних параметрів класів елементарних функціональних залежностей, зворотних до них, а також тих, які одержують із цих функцій за допомогою чотирьох арифметичних дій і суперпозицій, застосованих певну кількість разів. Доведено, що у загальному випадку дискретними аналогами елементарних функціональних залежностей будуть вирази скінченних різниць різних порядків із застосованими до них відповідними арифметичними діями. Зроблено висновки про доцільність подальших досліджень спрямованих на вивчення можливостей використання одержаних рекурентних аналогів функціональних залежностей для формування геометричних образів.

Формулювання цілей статті. Метою даної статті є дослідження можливостей використання суперпозицій точкових множин у поєднанні із рекурентними формулами числових послідовностей для дискретного моделювання геометричних образів за відповідними вихідними даними.

Основна частина. Нескінченна двовимірна числова послідовність

$$a_{i,j} = f(i,j) \qquad (1)$$

є дискретним аналогом неперервної аналітичної залежності

$$u_{x,y} = f(x,y). \qquad (2)$$

Рекурентна формула послідовності (1) зв’язує значення кінцевого ряду сусідніх її членів. Геометричний апарат суперпозицій дозволяє формувати ДВГО за координатами несуміжних довільно заданих вузлів.

Із однієї аналітичної залежності можна одержати різні рекурентні формули при заміні неперервних параметрів дискретними із наступним звільненням від дискретних параметрів.

При заміні аргументу x на дискретний параметр i у поліномі першого степеня

$$y = m_0 + m_1 x. \qquad (3)$$

Одержимо

$$a_i = m_0 + m_1 i. \qquad (4)$$

та звільняючись від дискретного параметра i можна одержати вираз для суміжних вузлів:

$$2a_i = a_{i-1} + a_{i+1}. \qquad (5)$$

Рекурентна формула (5) буде дискретним аналогом полінома першого степеня (3) при умові належності початкових умов у вигляді заданих координат двох точок формулі (4) — рис.1.

Наприклад, при початкових умовах $a_i = 5$, $a_{i+1} = 8$ формула (5) визначає дискретний аналог числової послідовності

$$a_i = 2 + 3i \;, \qquad (6)$$

а при початкових умовах: $a_i = 5$, $a_{i+1} = 6$, рекурентна формула (5) визначає дискретний ряд точок прямої

$$a_i = 3 + 2i \ . \qquad (7)$$

Рекурентна формула

$$a_i = 3a_{i-1} - 3a_{i-2} + a_{i-3} \qquad (8)$$

буде дискретним аналогом нескінченої числової послідовності (4) при умові належності початкових умов: a_i, a_{i+1}, a_{i+2} формулі (5). При довільно заданих початкових умовах формула (8) не буде дискретним аналогом нескінченої числової послідовності (рис. 2).

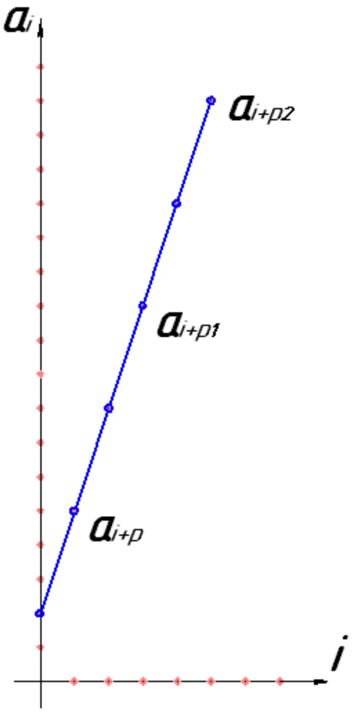

Рис. 1. Дискретно визначений поліном першого степеня $y = m_0 + m_1 x$.

Одночасно, координати будь-якої точки a_{i+p} числової послідовності першого порядку (рис.1) можна визначити як суперпозиції координат двох несуміжних довільних точок a_{i+p_1}, a_{i+p_2} даної послідовності [6] :

$$a_{i+p} = k_1 a_{i+p_1} + k_2 a_{i+p_2} \ , \qquad (9)$$

де $k_1 = -1\dfrac{p - p_2}{p_2 - p_1}$; $k_2 = -1\dfrac{p - p_1}{p_1 - p_2}$.

Ряд значень послідовності $a_i = 2 + 3i$ наведено у таблиці 1.

Таблиця 1.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_i	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32

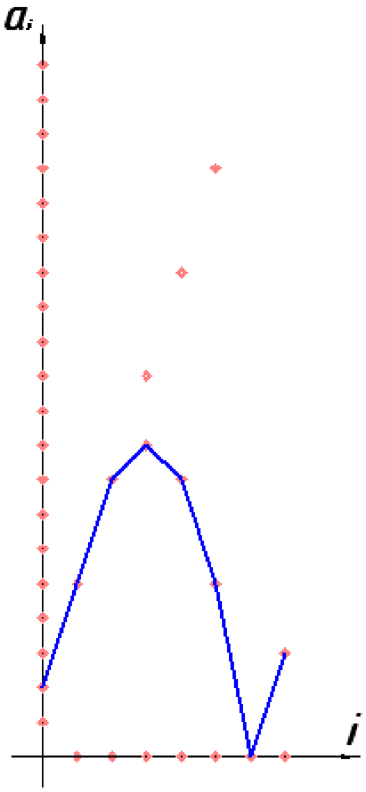

Рис. 2. Значення членів числової послідовності за рекурентною формулою (9) при довільних початкових умовах

Визначимо a_{i+p} за такими даними: $p=1; p_1=3; p_2=7; i=0.$

$$a_{i+p} = k_1 a_{i+p_1} + k_2 a_{i+p_2} = (-1)\frac{p-p_2}{p_2-p_1}11 + (-1)\frac{p-p_1}{p_1-p_2}23 =$$

$$= (-1)\frac{1-7}{7-3}11 + (-1)\frac{1-3}{3-7}23 = 5 \Rightarrow 5 = 5 .$$

При початкових умовах $a_{i+p_1} = 11$; $a_{i+p_2} = 23$, формула (9) буде дискретним аналогом нескінченної числової послідовності (6), а при початкових умовах: $a_{i+p_1} = 11$; $a_{i+p_2} = 15$, формула (9) визначає дискретний ряд точок іншої нескінченної числової послідовності: $a_i = 8 + i$.

При початкових умовах $a_{i+p} = 5$; $a_{i+p_1} = 11$; $a_{i+p_2} = 23$, формула (10), за такими ж даними: $p=1; p_1=3; p_2=7; i=0$, буде

$$a_{i+p_3} = k_1 a_{i+p} = k_2 a_{i+p_1} + k_3 a_{i+p_2} \tag{10}$$

дискретним аналогом полінома першого степеня (6) — рис. 1. При інших довільних початкових умовах, що не належать прямій, наприклад, $a_{i+p} = 5\ ; a_{i+p_1} = 11\ ;\ a_{i+p_2} = 15$;

$$k_1 = -1\frac{(p-p_2)(p-p_3)}{(p_2-p_1)(p_3-p_1)};\ k_2 = -1\frac{(p-p_1)(p-p_3)}{(p_1-p_2)(p_3-p_2)};$$

$$k_3 = -1\frac{(p-p_1)(p-p_2)}{(p_1-p_3)(p_2-p_3)};$$

формула (10) визначає дискретний ряд точок полінома другого степеня

$$y = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 . \tag{11}$$

Якщо двовимірна числова послідовність (1) розпадається на суму двох: $a_{i,j} = f_1(i) + f_2(j)$, то рекурентна формула подвійної числової послідовності може бути одержана як сума рекурентних формул двох одновимірних послідовностей [7], а також як сума формул числових послідовностей на основі суперпозицій одновимірних точкових множин.

Висновки. Формули числових послідовностей на основі геометричного апарату суперпозицій можуть бути використані для дискретного моделювання неперервних геометричних образів за відповідними вихідними даними. Дані формули в правій частині повинні мати коефіцієнти, число яких дорівнює числу параметрів функції і, що одержуються з неперервних аналітичних залежностей. Перспективними є дослідження n-вимірних числових послідовностей на основі суперпозицій точкових множин для дискретного геометричного моделювання.

Література

1. *Ковальов С.М.* Рекурентні формули числових послідовностей у формуванні дискретно визначених геометричних образів / С.М. Ковальов, С.І. Ботвіновська // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К.: КНУБА, 2006. — Вип. 76. — С. 30 - 37.
2. *Пустюльга С.І.* Дискретне визначення геометричних об’єктів числовими послідовностями: дис. д-ра техн. наук: 05.01.01 / С.І. Пустюльга. — Київ, КНУБА. 2006. — 316 с.
3. *Воронцов О.В.* Рекурентні аналоги класів елементарних функцій / О.В. Воронцов, Г.О. Радченко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2010. – Вип. 83. – С. 136-139.

4. *Воронцов О.В.* Дослідження рекурентних форм представлення елементарних функціональних залежностей / О.В. Воронцов, Г.О. Радченко // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87. – С. 98-101.
5. *Воронцов О.В.* Заміна неперервних форм елементарних функціональних залежностей рекурентними формулами задання дискретних числових послідовностей / О.В. Воронцов // Геометричне та комп’ютерне моделювання: збірник наук. праць. – Харків: ХДУХТ, 2010. – Вип. 27. – С. 57-62.
6. *Воронцов О.В.* Дискретна інтерполяція геометричних образів об’єктів будівництва одновимірними числовими послідовностями із нерівномірним кроком. / О.В. Воронцов // Строительство и техногенная безопасность. – Симферополь.: НАПКС, 2013. – Вип. 48. – С. 43-49.
7. Ковальов С.М., Гумен М.С., Пустюльга С.І., Михайленко В.Є., Бурчак І.Н. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1. – Луцьк.: Редакційно-видавничий відділ ЛДТУ, 2006. – С. 118-176.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АППАРАТ СУПЕРПОЗИЦИЙ И РЕКУРРЕНТНЫЕ ФОРМУЛЫ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ДИСКРЕТНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ

О. В. Воронцов

Аннотация **— в статье проведен анализ возможностей использования геометрического аппарата суперпозиций в сочетании с рекуррентными формулами числовых последовательностей для дискретного моделирования геометрических образов по соответствующим исходным данным.**

THE USE OF GEOMETRICAL SUPERPOSITION SET COMBINED WITH RECURRENT NUMERICAL SEQUENCE FORMULAE IN THE DISCRETE DESIGN OF GEOMETRICAL CHARACTERS

O. Vorontsov

Summary

The article provides an analysis of the use of geometrical superposition set combined with recurrent numerical sequence formulae in the discrete design of geometrical characters according to bench mark data.