УДК 514.18

ВИНИКНЕННЯ ПРУЖНИХ СФЕР БЕЗ ОБМЕЖЕННЯ ТЕОРІЇ ГЕРЦА ЩОДО РОЗДІЛІВ ЗОНИ КОНТАКТУ

Ісмаілова Н.П., к.т.н.
Одеська державна академія будівництва і архітектури
Тел. 067-795-64- 61

***Анотація* – у роботі розглядається задача для асиметричної теорії пружності для повної сфери. Пропонується використання умов характерних розмірів області контакту, з малими розмірами кожного з тих, що контактує, і з розмірами кривини їх поверхні.**

***Ключові слова* - асиметрична теорія, теорія Герца, область контакту, кінематична геометрія, кривизна.**

Постанова проблеми. При вирішенні завдання в рамках теорії Герца не можуть додатково бути узагальненими теорії пружних матеріалів унаслідок того, що властивості повинні виникати вже при досить малих відносних розмірах зони контакту.

Аналіз останніх досліджень. Рішення завдання про контактне ділення пружних сфер було отримано в класичній роботі [1] шляхом зведення теорії пружності до зони теорії потенціалу для півпросторів. При цьому пропонувалися умови характерних розмірів області контакту, які повинні бути малими порівняно з розмірами кожного з тих, що контактують, і з розмірами кривизни їх поверхні.

Формулювання цілей статті. Для гірничоподібних матеріалів область контакту може бути значна в границі дії закону Гука. Саме, для такого класу задач проводяться дослідження контактного руху двох ідентичних сфер.

Основна частина. У роботі розглядаються змішані контакти завдань для асиметричною теорії пружності, що до повної сфери. Розмір зони контакту буде визначаться кутом α, тоді радіус кола , по якій здійснюється контакт буде a :

$$a = R \cdot \sin \alpha. \tag{1}$$

Значення сил прикладених P_0 знаходимо в залежності від значення області контакту (кут α). Загальне рішення для пружної сфери в сферичних координатах отримано в роботах [2].

Спільне рішення задачі у разі сфери, навантаженої силою в центрі, має вид:

$$2Gu_1 = 4\frac{m-n}{m}\cdot\frac{a}{r}P_1(\cos\nu) +$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(n-6+\frac{4(m-n)}{m}\right)A_u r^{n+1} + B_n r^{n-1}\right]P_0\cos\theta$$

$$2Gu_0 = \frac{3m-n}{m}\cdot\frac{G_1}{r}P_1{}^{(1)}(\cos\nu) +$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(n+9-\frac{4(m+1)}{m}\right)A_u r^{n+1}\right.$$
$$\left.+B_n r^{n-1}\right]\frac{P_n'(\cos\nu)}{n(m+n)}\,. \qquad (2)$$

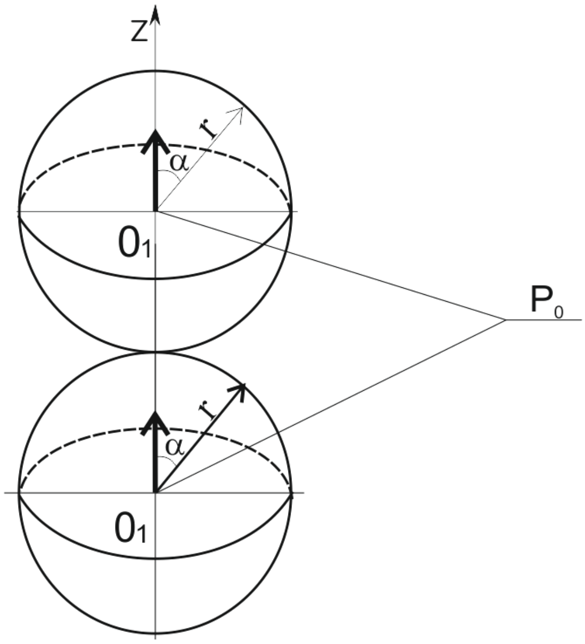

Рис. 1.

$$Gr = -2\frac{2m-1}{m}\cdot\frac{G_1}{r^2}P_1(\cos\nu) +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(n(n-1)-2\frac{2(m+1)}{m}\right)A_n r^n + B_n r^{n-r}\right]P_n\cos\nu$$
$$r_{2\nu}$$
$$= 4\frac{m-\alpha}{m}\cdot\frac{G_1}{r^2}P_1{}^{(1)}(\cos\omega) +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(n(n-1)(n+3)+\frac{2(m+n)}{m}\right)A_n r^n + (n^2\right.$$
$$\left.-1)B_n r^{n-2}\right]\frac{P_n^2(\cos\omega)}{n(n+1)}. \qquad (3)$$

Причому

$$Gr = \frac{m}{m+1}\frac{P_0}{3\pi}, B_\nu = 0,$$

m – число Пуасона
G- модуль зрушення.
Кінематична межа умови

$$U_s \Big|_{r=R} = -R(\cos\nu - \cos\alpha), (0 = \nu \leq \alpha)\,. \tag{4}$$

Покладемо

$$F_{ns} \Big|_{r=R} = -f(0), (0 = \nu \leq \alpha)$$

Запишемо граничні умови задачі

$$F_{ns} \Big|_{r=R} = \begin{cases} -f(\nu), (0 \leq \nu < \alpha) \\ 0, \ \ (\alpha \leq \nu \leq \pi), \end{cases}$$

$$F_{ns}\Big|_{r=R} = 0 \quad (\alpha \leq \nu \leq \pi). \tag{5}$$

$$-f(\nu) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_n(\cos\nu), \ \ a_u = -\frac{2n+1}{2}\int_0^\alpha f(\nu)P_n(\cos\nu)\cdot sin\omega \tag{6}$$

Постійне інтегрування за умови відсутності дотичних зусиль на поверхні сфер здійснюється через коефіцієнт розкладань невідомих зусиль у зонах контакту. Беручи для останнього інтегрування Абеля від деякої невідомої функції $\varphi(\gamma)$знаходимо зміну кутів координат в зоні контакту. Для неї задаємо осьові змінними, отримуємо інтегрування рівнянь Фрейдгольма другого роду, які містять логарифмічну особливість і регулярну частину ядра.

$$\cos\frac{3y}{2} - \cos\alpha\frac{\cos\alpha}{2}$$
$$= \left(-\frac{13\alpha}{2GR} + G\frac{G_1}{2GR^2}\right) cos\frac{y}{2} - \frac{10n-4}{3n+4}\frac{G_1}{2GR^2} xcos\ \frac{5y}{2} + \frac{m-1}{m}\pi\varphi(y)$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^\alpha \varphi(\gamma)\left\{\frac{(m-1)^2}{m}\ln\left(\frac{cos\frac{y}{x^2} - cos\frac{y}{2}}{\cos\frac{y}{x^2} + cos\frac{y}{2}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} F(u)\cdot\cos(n+\frac{1}{2}x\right.$$
$$\left.\cdot\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right\} dx, \tag{7}$$

де

$$\mathrm{F(u)} = \frac{a_u + b}{(2n+1)\Delta u} + \frac{1}{n(2n+1)}, \qquad \Delta_u = u^2 - u\frac{m-2}{n} + \frac{m+1}{m}$$
$$a = -3 - 2\frac{7m^2 - 2ym + 16}{3}; \quad b - 5\frac{m-5}{m}$$
$$+ 4\frac{9m-4}{m^3}; \tag{8}$$
$$G = 2\frac{m-1}{m}\left(-\frac{13}{6} + \frac{122m^2 - 120m + 96}{6m^2(m^2-1)}\right).$$

Рішення рівняння знайдено числовим методом, яким базується на використанням формули Гаусса.

Розподілення напруги в контактах визначається за допомогою зворотного рівняння Абеля

$$\frac{G(\nu)}{2G} = cos\nu\left(-\frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{2cos\nu - 2cos\alpha}} + \int_0^\alpha \frac{\varphi'(x)dx}{\sqrt{2cos\nu - 2cos\alpha}}\right). \tag{9}$$

Причому $\varphi(\alpha) = 0$ - умова обмеження напруги в кінцевих точках області контакту. Розподілена нормальна напруга в зоні контакту по Герцу [3]

$$\frac{G(\nu)}{2G} = \frac{4}{\pi}\sqrt{\sin y^2\alpha - \sin y^2\nu}\ . \tag{10}$$

З зіставлення побудованого кута розподіленого нормальної напруги в області контакту з класичним рішенням Герца (10) випливає, що теорія Герца дає результати з високим ступенем точності для кутів контакту, які були не малими $(\alpha \leq 13{,}5)$. Помилка для зони значення контакту в центрі зони контакту становить 1%.

На рис. 2 і 3 зображено відповідно якісні характеристики розподілених зсунутих u_p і осьових u_s переміщених точок на поверхні. Осьові змінні в граничній зоні контакту $0 \leq \nu \leq \alpha$ визначаються з кінематичними граничними умовами (5).

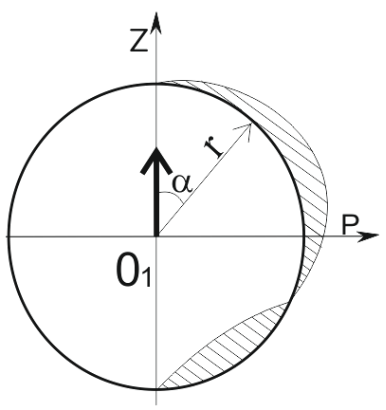

Рис. 2.

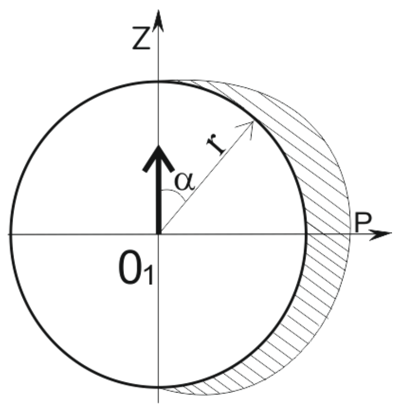

Рис. 3.

Висновки. Наведена теорія Герца в області контакту з малими розмірами кривини на поверхні, може бути основою формування точних методів проектування спряжених поверхонь деталей, забезпечить їх оптимальну форму та розміри з точки зору надійності.

Література

1. Hearth uber die Beruhruus fester ela sfisher // Jorge fur revue end angewaudte mathematic . –1881
2. *Улитко П.А.* Метод собственных функций в пространственных задачах теории упругости / П.А. Улитко. – К.: Наук. думка, 1979. – 264 с.
3. *Тимошенко С.П.* Курс теории упру гости /С.П. Тимошенко. – К.: Наук. думка, 1972. – 508 с.

ВОЗНИКНОВЕНИЕ УПРУГИХ СФЕР БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЯ ТЕОРИИ ГЕРЦА ПО РАЗДЕЛАМ ЗОНЫ КОНТАКТА

Н.П. Исмаилова

Аннотация **– работа посвящена геометрическому моделированию в области контакта, со сравнительно размерами малыми каждого из тех, что контактирует, и с размерами кривизны их поверхности.**

ORIGIN OF RESILIENT SPHERES WITHOUT LIMITATION THEORIES OF GERCA IN RELATION TO SECTIONS OF AREA OF CONTACT

N. Ismailova

Summary

Predlagaetsya use of terms of characteristic sizes of area of contact, with small comparatively sizes each of those, that contacts, and with the sizes of curvature of their surface.