УДК 514.18

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПЛАСТИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ

Ницын А.Ю., д.т.н.
НТУ «Харьковский политехнический институт»
Тел. (057) 707-6431

***Аннотация* – в статье излагается вывод уравнения деформации, в котором сопротивление пластины растяжению и изгибу определяется её геометрией и физическими свойствами материала.**

***Ключевые слова* – деформации растяжения и изгиба, пластина.**

Постановка проблемы. Конструирование поверхности является одной из основных задач геометрического моделирования. При этом среди методов конструирования поверхности выделяется формообразование геометрического тела с помощью аппроксимации его поверхности семействами продольных и поперечных линий и их деформации под действием сил, приложенных к узлам образованной ими сетки.

Анализ последних достижений. Проблеме деформационного моделирования поверхности посвящены работы многих отечественных и зарубежных ученых. Например, в трудах С.Н. Ковалёва и представителей его научной школы разработаны основы статико-геометрического метода [1]. Труды С.И. Пустюльги и его учеников развивают идеи, заложенные С.Н. Ковалёвым, и предлагают синтез статико-геометрического метода и теории числовых последовательностей [2, 3]. Однако статико-геометрический метод не учитывает ни физических свойств материала, ни деформации изгиба. Поэтому его применение ограничивается проектированием архитектурных покрытий, которые под действием собственного веса не подвергаются значительным изгибающим моментам.

Формулирование целей статьи. Таким образом, целью статьи является вывод уравнения, описывающего деформацию пластины под действием сосредоточенной нагрузки с учётом геометрии пластины и физических свойств её материала.

Основная часть. Введем в пространство пластину с постоянной толщиной δ. Выделим в пластине два семейства линий: первое, проходящее в продольном направлении, и второе, располагающееся перпендикулярно к первому семейству. Пусть семейства продольных и поперечных линий проходят через центры тяжести продольных и поперечных сечений пластины. Представим пластину как поверхность, образованную семействами продольных и поперечных линий, при условии, что расстояния между смежными линиями составляют бесконечно малую величину. Присвоим поверхности физические свойства материала пластины и её геометрические параметры, например, толщину. Выделим на поверхности точку M с массой m, равной массе пластины. Зададим поверхность в векторно-параметрическом виде $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$. Пусть стержень под действием постоянной силы $\mathbf{P}$, приложенной к точке M, подвергается деформациям растяжения и изгиба. Поскольку положение точки M зависит как от времени t действия силы $\mathbf{P}$, так и от значений параметров u, v, её радиус-вектор становится функцией трёх параметров $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v,t)$. При этом работа, которую совершает постоянная сила $\mathbf{P}$ для перемещения точки её приложения на расстояние $d\mathbf{r}$, расходуется на приращение кинетической энергии точки M, а также на приращение потенциальной энергии W_1 растяжения и изгиба стержней, аппроксимирующих семейство продольных линий, и на приращение потенциальной энергии W_2 растяжения и изгиба стержней, аппроксимирующих семейство поперечных линий.

Следовательно, движение точки M, взятой на поверхности, под действием постоянной силы $\mathbf{P}$ можно описать уравнением, подобным уравнению движения точки, прикрепленной к линии [4]:

$$m\frac{\partial\mathbf{r}(u,v,t)}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{r}(u,v,t)}{\partial t^2}+W_1+W_2=\mathbf{P}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}(u,v,t)}{\partial t}. \tag{1}$$

Выделим на поверхности продольную линию $v=const$, которую описывает конец радиус-вектора $\mathbf{r}(u,v,t)$ при изменении параметра u и постоянном значении параметра v. Кроме того, выделим на поверхности продольную линию $u=const$, которую описывает конец радиус-вектора $\mathbf{r}(u,v,t)$ при изменении параметра v и постоянном значении параметра u. Пусть продольная и поперечная линии проходят через точку приложения постоянной силы $\mathbf{P}$.

Введем подвижную систему декартовых координат, заданную единичными векторами $\mathbf{t}(u)$, $\mathbf{n}(u)$ и $\mathbf{b}(u)$ касательной, нормали и бинормали к продольным линиям и началом координат в центре тяжести нормального сечения продольных стержней. Будем рассматривать векторы $\mathbf{n}(u)$ и $\mathbf{b}(u)$ как единичные векторы декартовой системы координат, привязанной к нормальному сечению продольных стержней.

Представим продольную линию $v = const$ как прямоугольный стержень с площадью нормального сечения $F = \delta \left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v}\right| dv$ и вычислим приращение потенциальной энергии $\partial_v W_1$ растяжения и изгиба, накопленные продольным стержнем в течение бесконечно малого промежутка времени dt [4]:

$$\partial_v W_1 = \delta \int_L \sigma(\varepsilon_u) \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial t} \left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u}\right| \left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v}\right| du dv dt +$$
$$+ \int_L \left(\int_F \sigma\left(\frac{h}{\rho_u}\right) h dF \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho_u} \left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u}\right| \right) du dt,$$

где L – длина пластины.

При этом относительное удлинение ε_u бесконечно малого участка продольного стержня, совершающееся в течение конечного промежутка времени, и радиус его кривизны ρ_u вычисляются по следующим формулам [4, 5]:

$$\varepsilon_u = \frac{\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u}\right| - \left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,0)}{\partial u}\right|}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,0)}{\partial u}\right|}; \; \rho_u = \frac{\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u}\right|^3}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u^2}\right|}.$$

Выполним суммирование приращений потенциальной энергии $\partial_v W_1$ растяжения и изгиба всех продольных стержней и получим приращение потенциальной энергии W_1 растяжения и изгиба, накопленные пластиной в течение бесконечно малого промежутка времени dt, в направлении координатных линий $v = const$:

$$W_1 = \int_W \partial_v W_1 =$$
$$= \delta \iint_S \sigma(\varepsilon_u) \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial t} \left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u}\right| \left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v}\right| du dv dt +$$
$$+ \iint_S \left(\int_F \sigma\left(\frac{h}{\rho_u}\right) h dF \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho_u} \left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u}\right| \right) du dt,$$

где W, S – ширина и площадь пластины.

Введем подвижную систему декартовых координат, заданную единичными векторами $\mathbf{t}(v)$, $\mathbf{n}(v)$ и $\mathbf{b}(v)$ касательной, нормали и бинормали к поперечным линиям и началом координат в центре тяжести нормального сечения поперечных стержней. Будем рассматривать векторы $\mathbf{n}(v)$ и $\mathbf{b}(v)$ как единичные векторы декартовой системы координат, привязанной к нормальному сечению поперечных стержней.

Представим поперечную линию $u = const$ как прямоугольный стержень с площадью нормального сечения $F = \delta \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u} \right| du$ и вычислим приращение потенциальной энергии $\partial_u W_2$ растяжения и изгиба, накопленные поперечным стержнем в течение бесконечно малого промежутка времени dt [4]:

$$\partial_u W_2 = \delta \int_W \sigma(\varepsilon_v) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v} \right| dudvdt +$$
$$+ \int_W \left(\int_F \sigma\left(\frac{h}{\rho_v} \right) hdF \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho_v} \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v} \right| \right) dvdt.$$

При этом относительное удлинение ε_v бесконечно малого участка поперечного стержня, совершающееся в течение конечного промежутка времени, и радиус его кривизны ρ_v вычисляются по следующим формулам [4, 5]:

$$\varepsilon_v = \frac{\left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v} \right| - \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,0)}{\partial v} \right|}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,0)}{\partial v} \right|}; \ \rho_v = \frac{\left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v} \right|^3}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v^2} \right|}.$$

Выполним суммирование приращений потенциальной энергии $\partial_u W_2$ растяжения и изгиба всех поперечных стержней и получим приращение потенциальной энергии W_2 растяжения и изгиба, накопленные пластиной в течение бесконечно малого промежутка времени dt, в направлении координатных линий $u = const$:

$$W_2 = \int_L \partial_u W_2 = \delta \iint_S \sigma(\varepsilon_v) \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v} \right| dudvdt +$$
$$+ \iint_S \left(\int_F \sigma\left(\frac{h}{\rho_v} \right) hdF \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho_v} \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v} \right| \right) dvdt.$$

Рассмотрим частный случай, когда деформации растяжения и изгиба находятся в пределах упругости. Выразим данные условия с помощью следующих неравенств:

$$\varepsilon_u \le \varepsilon_1; \ \varepsilon_u = \frac{h_{max}}{\rho_u} \le \varepsilon_1;$$

$$\varepsilon_v \le \varepsilon_1; \ \varepsilon_v = \frac{h_{max}}{\rho_v} \le \varepsilon_1,$$

где ε_1 – относительное удлинение стержня, которое согласно диаграмме растяжения соответствует пределу упругости; h_{max} – наибольшая высота элементарной площадки dF над спрямляющей плоскостью, заданной единичными векторами касательной и бинормали к продольным и поперечным линиям.

Поскольку в пределах упругости нормальные напряжения изменяются прямо пропорционально относительным удлинениям [6], приращения потенциальных энергий W_1, W_2 растяжения и изгиба пластины в направлении координатных линий $v = const$, $u = const$ приобретают следующий вид:

$$W_1 = E\delta \iint_S \varepsilon_u \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial t} \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v} \right| dudvdt +$$
$$+ E \iint_S \frac{1}{\rho_u} J_v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho_u} \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u} \right| \right) dudt; \qquad (2)$$

$$W_2 = E\delta \iint_S \varepsilon_v \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v} \right| dudvdt +$$
$$+ E \iint_S \frac{1}{\rho_v} J_u \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho_v} \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v} \right| \right) dvdt, \qquad (3)$$

где E – модуль Юнга; $J = \int_F h^2 dF$ – момент инерции площади нормального сечения стержня.

Поскольку нормальные сечения продольного и поперечного стержней являются прямоугольниками, а начало декартовых систем координат располагаются в их центрах тяжести, моменты инерции площади нормального сечения продольного J_v и поперечного J_u стержней вычисляются по формулам [6]:

$$J_v = \frac{\delta^3}{12} \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v} \right| dv; \; J_u = \frac{\delta^3}{12} \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u} \right| du.$$

Подставим левые части этих формул в соотношения (2), (3) и получим выражения, по которым вычисляются приращения потенциальных энергий W_1, W_2 растяжения и изгиба пластины:

$$W_1 = E\delta \iint_S \varepsilon_u \frac{\partial \varepsilon_u}{\partial t} \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v} \right| dudvdt +$$
$$+ E \frac{\delta^3}{12} \iint_S \frac{1}{\rho_u} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho_u} \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u} \right| \right) \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v} \right| dudvdt;$$

$$W_2 = E\delta \iint_S \varepsilon_v \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v} \right| dudvdt +$$

$$+E\frac{\delta^3}{12}\iint_S \frac{1}{\rho_v}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho_v}\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v}\right|\right)\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u}\right| dudvdt.$$

Подставим левые части этих формул в выражение (1) и получим уравнение упругой деформации пластины под действием постоянной силы **P** в течение бесконечно малого промежутка времени dt:

$$m\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial t^2}+E\delta\iint_S \varepsilon_u\frac{\partial \varepsilon_u}{\partial t}\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u}\right|\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v}\right| dudvdt+$$
$$+E\frac{\delta^3}{12}\iint_S \frac{1}{\rho_u}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho_u}\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u}\right|\right)\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v}\right| dudvdt+$$
$$+E\delta\iint_S \varepsilon_v\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u}\right|\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v}\right| dudvdt+$$
$$+E\frac{\delta^3}{12}\iint_S \frac{1}{\rho_v}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho_v}\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v}\right|\right)\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u}\right| dudvdt=\mathbf{P}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial t}$$

Рассмотрим частный случай, когда деформации растяжения и изгиба находятся за пределами упругости. Выразим данные условия с помощью следующих неравенств:

$$\varepsilon_u>\varepsilon_1;\ \varepsilon_u=\frac{h_{max}}{\rho_u}>\varepsilon_1;$$
$$\varepsilon_v>\varepsilon_1;\ \varepsilon_v=\frac{h_{max}}{\rho_v}>\varepsilon_1.$$

Предположим, что за пределами упругости нормальные напряжения являются постоянной величиной и не зависят от относительного удлинения стержня [7, 8]. Тогда приращения потенциальных энергий W_1, W_2 растяжения и изгиба пластины в направлении координатных линий $v=const$, $u=const$ приобретают следующий вид:

$$W_1=\sigma_1\delta\iint_S\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u}\right|\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v}\right| dudvdt+$$
$$+\sigma_1\iint_S S_v\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho_u}\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u}\right|\right)dudt; \qquad (4)$$
$$W_2=\sigma_1\delta\iint_S\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u}\right|\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v}\right| dudvdt+$$
$$+\sigma_1\iint_S S_u\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho_v}\left|\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v}\right|\right)dvdt, \qquad (5)$$

где σ_1 – наибольшее напряжение, до которого действует закон Гука; $S = \int\limits_F hdF$ – статический момент площади нормального сечения стержня.

Поскольку геометрические оси, относительно которых рассчитываются статические моменты площадей нормальных сечений продольных и поперечных стержней, проходят через их центры тяжести, статические моменты S_u, S_v равняются нулю. Поэтому после подстановки нулевых значений статических моментов в соотношения (4), (5) формулы, по которым вычисляются приращения потенциальных энергий W_1, W_2 растяжения и изгиба пластины, приобретает вид:

$$W_1 = \sigma_1 \delta \iint\limits_S \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v} \right| dudvdt;$$

$$W_2 = \sigma_1 \delta \iint\limits_S \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v} \right| dudvdt.$$

Подставим левые части этих формул в выражение (1) и получим уравнение пластической деформации пластины под действием постоянной силы $\mathbf{P}$ в течение бесконечно малого промежутка времени dt:

$$m\frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial t^2} + + \sigma_1 \delta \iint\limits_S \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v} \right| dudvdt +$$
$$+ \sigma_1 \delta \iint\limits_S \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial u} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial v} \right| dudvdt = = \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}(u,v,t)}{\partial t}.$$

Заметим, что в уравнениях упругой и пластической деформаций пластины приращения потенциальных энергий растяжения и изгиба определяются исключительно геометрией поверхности, проходящей через центры тяжести нормальных сечений пластины, и физическими свойствами её материала.

Выводы. Таким образом, в статье изложен вывод уравнения деформации, в котором сопротивление пластины растяжению и сжатию связывается с её геометрией и физическими свойствами материала. Направление дальнейших исследований связано с разработкой метода конструирования поверхности на основе геометрического моделирования процессов преобразования энергии, возникающих при её деформации под действием внешних сил.

Литература

1. *Ковалев С. Н.* Структура автоматизированного формообразования растянутых систем / С. Н. Ковалев // Прикладная геометрия и

инженерная графика. – К. : Будівельник, 1980. – Вып. 30. – С.12–17.
2. *Пустюльга С. І.* Формоутворення дискретно поданих кривих під навантаженням, що залежить від метричних параметрів кривих / С. І. Пустюльга, В. П. Самчук // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2003. – Вип. 72. – С. 178–182.
3. *Пустюльга С. І.* Принципи узагальнення статико-геометричного підходу до моделювання дискретних структур / С. І. Пустюльга // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2004. – Вип. 74. – С. 114–121.
4. *Ницын А. Ю.* Уравнение деформации линии под действием постоянной силы, приложенной к ее точке / А. Ю. Ницын // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2010. – Вип. 26. – С. 99–109.
5. *Ніцин О. Ю.* Технологія геометричного моделювання. Конструювання кривих ліній ; [навч. посіб.] / О. Ю. Ніцин. – Харків : Вид-во «Форт», 2008. – 134 с.
6. *Беляев Н. М.* Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 607 с.
7. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории : в 2 кн. / А. А. Ильюшин. – М. : Изд-во Акад. наук СССР, 1963. – . – Кн. 1. – 1963. – 648 с.
8. *Прагер В.* Теория идеально пластических тел / В. Прагер, Ф. Ходж; пер. с англ. – М. : Изд-во иностр. лит., 1976. – 512 с.

ВИВЕДЕННЯ РІВНЯННЯ ДЕФОРМАЦІЇ ПЛАСТИНИ ПІД ВПЛИВОМ ЗОСЕРЕДЖЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

О.Ю. Ніцин

***Анотація* – в статті викладається виведення рівняння деформації, в якому опір пластини розтягуванню і вигину визначається її геометрією і фізичними властивостями матеріалу.**

THE DERIVATION OF EQUATION OF DEFORMATION OF PLATE UNDER THE ACTION OF POINT LOAD

A. Nitsyn

Summary

The derivation of equation of deformation, in which resistance of plate to stretching and bend is determined by its geometry and physical properties of material, is expounded in the article.