

УДК 004.9

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ОДНОГО МЕТОДУ НАБЛИЖЕННЯ ЗАМКНЕНИХ КРИВИХ

Тулученко Г.Я., д.т.н.,

Старун Н.В., к.т.н.,

Білоусова Т.П.,

Лукашова А.М.

Херсонський національний технічний університет

Тел. (0552) 32-69-95

Анотація – у статті розглядаються можливості розширення області застосування методу фазового кола за рахунок використання багатозв’язних лемніскат.

Ключові слова – багатофокусна лемніската, метод фазового кола, апроксимація.

Постановка проблеми. Метод фазового кола, який опублікований у роботі [1], розроблений для задач наближення замкнених, без самоперетинів емпіричних контурів однозв’язними багатофокусними лемніскатами. Комп’ютерні експерименти показують, що для емпіричних кривих довільного походження при реалізації цього методу є розповсюдженим явище утворення багатозв’язних лемніскат, при чому апроксимація виконується одним із контурів такої лемніскати. Таким чином, існує потреба у модифікації алгоритму реалізації названого методу з метою його адаптації до нових умов апроксимації.

Аналіз останніх досліджень. Алгоритм реалізації методу фазового кола та його критерії збіжності описані у роботі [1].

Формулювання цілей статті. Дослідити можливості апроксимації замкнених емпіричних контурів одним (назвемо його цільовим) із контурів багатозв’язної лемніскати.

Основна частина. Багатофокусна лемніската на комплексній площині описується рівнянням:

$$\left| \prod_{i=1}^m (z - s_i) \right| = R, \quad (1)$$

де s_i – фокуси лемніскати; m – кількість фокусів лемніскати; R – радіус лемніскати.

В іншій нотації рівняння лемніскати набуває виду:

$$|F(z)| = R, \quad (2)$$

де $F(z) = z^m + c_{m-1} \cdot z^{m-1} + \dots + c_1 \cdot z + c_0$ – поліном, який має коренями m фокусів лемніскати.

Рівняння (2) на площині образів описує коло. Поліном $F(z)$ відображає точки емпіричної кривої в точки кола наближено, а точки апроксимуючої лемніскати в точки того ж кола відображає точно. Образи точок апроксимуючої лемніскати позначимо $R \cdot w_j$.

Для знаходження параметрів апроксимуючої лемніскати (координат фокусів і значення параметра R) у роботі [1] пропонується розв'язати задачу мінімізації функціонала, якому надається назва W -критерій:

$$W = \sum_{j=1}^n (F(z_j) - R \cdot w_j)^2, \quad (3)$$

де w_j – образи точок емпіричної кривої на фазовому колі.

Критерій (3) на комплексній площині є аналогом критерію методу найменших квадратів.

Положення на фазовому колі точок $R \cdot w_j$ є початково невідомими. У роботі [1] їх пропонується розміщувати на фазовому колі так, щоб аргументи цих точок рівномірно змінювалися на відрізку $[0; 2\pi m]$, де m – кількість фокусів апроксимуючої лемніскати. Надалі положення точок w_j уточнюються у циклі. За уточнені положення точок w_j приймають значення полінома $F(z)$ (із коефіцієнтами, які знайдені на попередній ітерації) у точках емпіричної кривої.

За відсутністю додаткових вимог (тобто при розв'язанні задачі безумовної мінімізації функціоналу (3)) апроксимуюча лемніската не обов'язково має бути однозв'язною. Наші комп'ютерні експерименти показали, що поява зовнішніх (по відношенню до емпіричного контуру) фокусів апроксимуючої лемніскати є поширеним явищем, починаючи з малих значень m кількості фокусів лемніскати. При чому локалізація цих зовнішніх фокусів суттєво і непередбачувано змінюється з ростом m . Це, в свою чергу, приводить до великих коливань значень радіусу R , які стають величинами різних порядків. У результаті таких змін радіусу R значення W -критерію, які обчислені при різній кількості фокусів m , є непорівнюваними між собою величинами.

Пропонується виконати нормування рівняння апроксимуючої лемніскати (2) і W -критерію (3) таким чином, щоб поліном $F(z)$ виконував відображення на одиничне фазове коло.

Отже, рівняння апроксимуючої лемніскати будемо шукати у вигляді:

$$|P(z)| = 1, \quad (4)$$

де $P(z) = p_m \cdot z^m + p_{m-1} \cdot z^{m-1} + \dots + p_1 \cdot z + p_0$ – поліном, який має коренями ті ж m фокусів лемніскати.

Із задачі мінімізації функціонала:

$$W = \sum_{j=1}^n (P(z_j) - w_j)^2. \quad (5)$$

Запропонована модифікація методу фазового кола апробована нами на ряді прикладів. На рис. 1 показані результати апроксимації емпіричної кривої, яку створено на основі фотографії, де за m позначена загальна кількість фокусів апроксимуючої лемніскати.

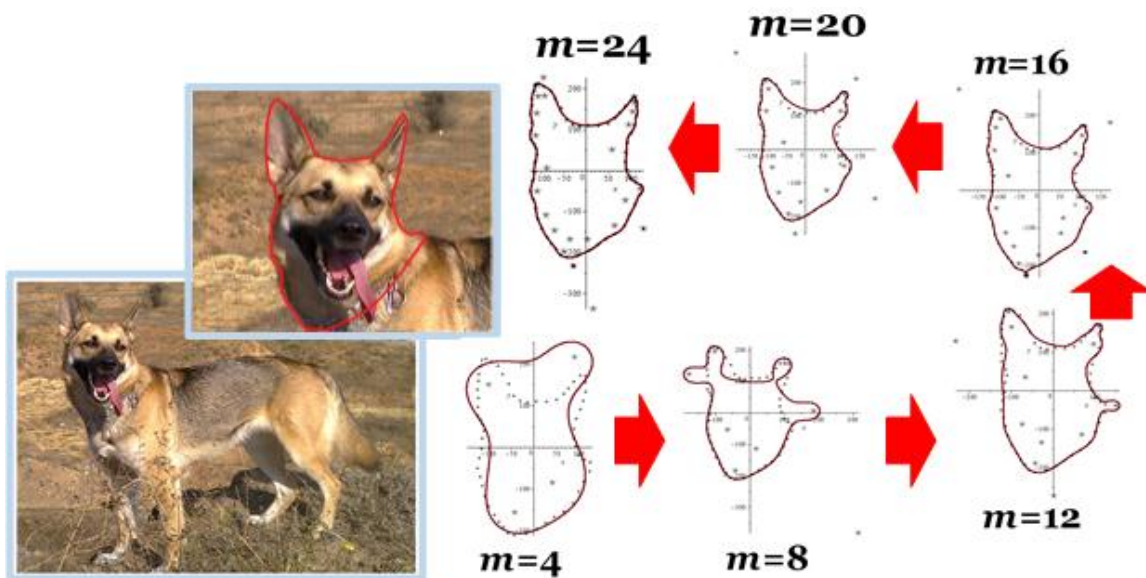


Рис. 1. Динаміка наближення емпіричної кривої, яку створено на основі фотографії.

Апроксимація відбувається одним із контурів багатозв'язної лемніскати. Фокуси лемніскати на рис. 1 позначені зірочками.

На рис. 2 наведена геометрична інтерпретація доданків W -критерію (5): синім кольором позначені уточнені положення точок w_j на фазовому колі, червоним кольором позначені образи точок емпіричної кривої.

Відзначимо, що в усіх проведених нами тестах для емпіричних кривих довільного походження значення модифікованого W -критерію (5) змінюються немонотонно із ростом кількості фокусів, але із збереженням загальної тенденції до зменшення. Строго монотонне спадання значень W -критерію (5) спостерігається тільки для емпіричних контурів, які штучно змодельовані за рівняннями багатофокусних лемніскат. Не є виключенням наведена для прикладу задача апроксимації емпіричного контуру у вигляді голови собаки (рис. 3).

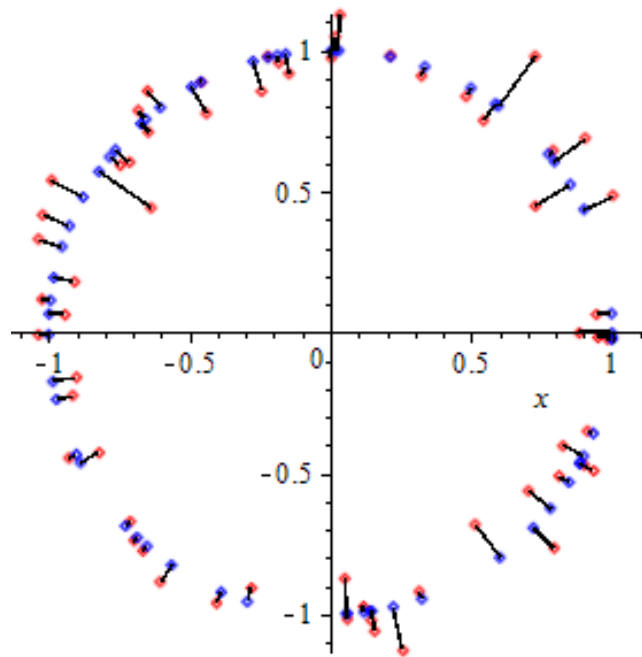
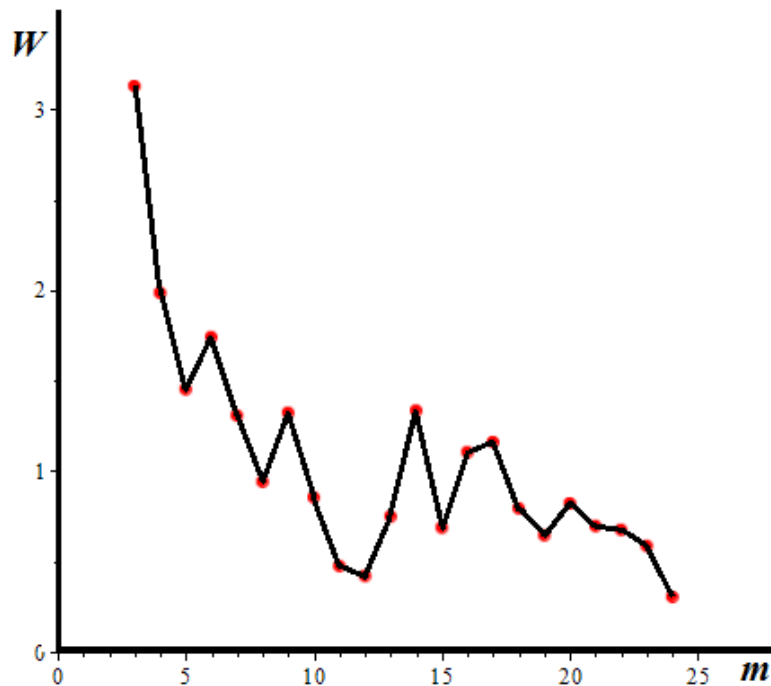


Рис. 2. Фазове коло.

Рис. 3. Залежність значень модифікованого W -критерію (5) від кількості фокусів апроксимуючої лемніскати.

Висновки. Метод фазового кола припускає розробку його модифікацій, зокрема, щодо можливостей застосування багатозв'язних лемніскаг для апроксимації емпіричних контурів. У

цьому випадку доцільним є пошук рівняння лемніскати у вигляді (4) і застосування критерію збіжності у вигляді (5).

Методу багатофокусної апроксимації притаманні усі вади поліноміальної апроксимації явно заданих функцій, зокрема, виникнення паразитарних осциляцій (рис. 1). Тому перспективи подальших досліджень пов'язані із встановленням додаткових умов при розв'язанні задачі мінімізації функціонала (5) щодо збереження апроксимуючою лемніскатою проміжків опуклості емпіричної кривої.

Література

1. *Ракчеева Т.А.* Критерии и сходимость многофокусной аппроксимации / Т.А. Ракчеева // Компьютерные исследования и моделирование. – Москва, 2013. – Т. 5. – № 3. – С. 379-394.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ОДНОГО МЕТОДА ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ

Г.Я. Тулученко, Н.В. Старун, Т.П. Білоусова, А.М. Лукашова

Аннотация – в статье рассматриваются возможности расширения области применения метода фазовой окружности за счет использования многосвязных лемнискат.

INVESTIGATION OF APPROXIMATION METHOD PROPERTIES FOR CLOSED CURVES

G. Tuluchenko, N. Starun, T. Bilousova, A. Lukashova

Summary

The possibilities of extending the application sphere of phase circle method by multiply connected lemniscates are discusses in the article.