УДК 514.18

ВИЗНАЧЕННЯ РІВНЯННЯ ВІДБИВАЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Тютюнников С.В.
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Тел. (0312) 64-30-89

Анотація **- розглянуто спосіб визначення рівняння відбивальної поверхні за допомогою диференціального рівняння спеціального виду та його модифікації.**

Ключові слова **– просторовий відбивач, ортотоміка, алгоритм.**

Постановка проблеми. Просторові відбивальні системи знаходять широке застосування в архітектурній акустиці, геліотехніці, теплових обігрівачах, тощо. При цьому від якості форми відбивача залежить функціонування відбивальної системи в цілому. Тому актуальними будуть дослідження, спрямовані на пошук адекватної геометричної форми поверхні - відбивача з наперед заданими оптичними властивостями. Розрахунок відбивальних систем в просторі здійснюють переважно графічними методами.

Але з появою обчислювальної техніки з'явилася можливість визначати просторові форми шляхом обчислення їх координат [1-3]. При цьому використовуються формули аналітичної геометрії, і розрахунки зводяться до визначення положення „віртуальної" площини, яка б мала бути дотичною до відбивальної поверхні. В результаті задача зводиться до розв'язання алгебраїчних рівнянь великих порядків.

Аналіз останніх досліджень. В роботах [4,5] наведено метод складання аналітичних залежностей, які можна покласти в основу опису відбивальної поверхні за допомогою диференціальних рівнянь. Тобто метод визначення форми циліндричної відбивальної поверхні на основі розв'язання граничної задачі для диференціального рівняння [6].

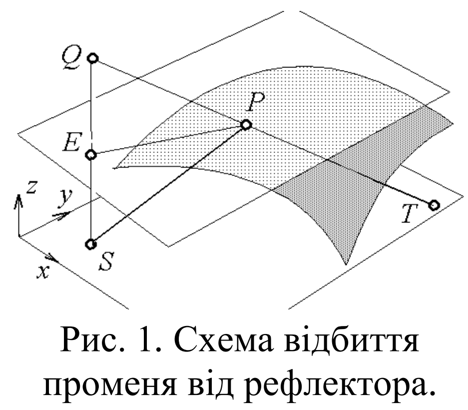

Рис. 1. Схема відбиття променя від рефлектора.

Нехай у декартовій системі координат *Oxyz* задана відбивальна поверхня $z = z(x, y)$ і джерело променів $S(x_S, y_S, 0)$. Позначимо через $P(x, y, z)$ точку падіння променя на рефлектор, а через $T(x_T, y_T, 0)$ - точку зустрічі відбитого променя з площиною Oxy (рис. 1).

Відбитий промінь PT звичайно будують за допомогою уявного джерела - точки $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, розташованої симетрично точці S відносно дотичної площини $z = z_P + \frac{\partial z}{\partial x}(x - x_P) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_P)$, що проходить через точку $P(x_P, y_P, z_P)$ падіння променя (рис. 1).

Якщо похідні обчислювати в точці $P(x_P, y_P, z_P)$ падіння променя на рефлектор, то координати відображення точки $S(x_S, y_S, z_S)$ відносно дотичної площини можна визначити за формулами:

$$x_Q = x_S - 2\frac{\partial z}{\partial x}k; \quad y_Q = y_S - 2\frac{\partial z}{\partial y}k; \quad z_Q = z_S + 2k, \tag{1}$$

де $k = \dfrac{z - z_S - (x - x_S)\frac{\partial z}{\partial x} - (y - y_S)\frac{\partial z}{\partial y}}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$.

Множина точок Q із зазначеною властивістю, утворять поверхню уявних джерел, яку прийнято називати *ортотомікою*.

Нехай джерело променів розташоване в точці початку координат, тобто $S(0, 0, 0)$. Тоді, в залежності від опису відбивальної поверхні $z = z(x, y)$, координати точки T визначаються за формулами:

$$x_T = x - \frac{(x_Q - x)z(x, y)}{z_Q - z(x, y)}; \quad y_T = y - \frac{(y_Q - y)z(x, y)}{z_Q - z(x, y)}, \tag{2}$$

або, після врахування значень величин x_Q, y_Q і z_Q із виразів (1), маємо:

$$x_T = 2\frac{\left(z\frac{\partial z}{\partial x} + x\right)\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z\right)}{2\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) + z\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 1\right)};$$

$$y_T = 2\frac{\left(z\frac{\partial z}{\partial y} + y\right)\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z\right)}{2\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) + z\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 1\right)}. \tag{3}$$

Якщо в рівняння (3) підставити конкретні значення координат точки $T(x_T, y_T, 0)$ то утворені вирази (3) можна трактувати як систему диференціальних рівнянь відносно функції двох змінних $z(x, y)$.

Формулювання цілей статті. За допомогою розв'язання диференціального рівняння (3) і його модифікації (5) необхідно визначити функцію $z = z(x, y)$, яка входить до опису поверхні - рефлектора в залежності від координат джерела променів - точки $S\ (x_S\ ,\ y_S,\ 0)$, і координат приймача відбитого променя - точки $T(x_T, y_T, 0)$.

Основна частина. Було складено MAPLE-програму розв'язання системи (3) для визначення відбивальної поверхні для випадку, коли точка-приймач відбитих променів має координати $T\,(5, 0, 0)$.

Аналітичним результатом виконанням програми буде визначення трьох функцій, які формально задовольняють системі рівнянь (3):

$$\mathrm{z}(x, y) = -\sqrt{10\,x - x^2 - 25 - y^2}\ ;\quad \mathrm{z}(x, y) = \sqrt{10\,x - x^2 - 25 - y^2}\ ; \tag{4}$$

$$\mathrm{z}(x, y) = \left(-y^2 + \frac{25}{8\,\_C1\,(1 + 2\,\_C1)} - \frac{5\,x}{2\,\_C1\,(1 + 2\,\_C1)} + \frac{x^2}{2\,\_C1\,(1 + 2\,\_C1)} - \frac{5\,x}{1 + 2\,\_C1} + \frac{x^2}{1 + 2\,\_C1}\right)^{(1/2)}.$$

На рис. 2. наведено графічний результат виконання програми, одержаний за допомогою третьої функції з виразів (4) при значенні константи інтегрування _C1 = - 1. Тоді функція $z(x, y)$ набуде вигляду $\frac{\sqrt{-16\,y^2 + 50 + 40\,x - 8\,x^2}}{4}$. На вказаному рисунку зображено фрагмент еліпсоїда, „обірвані" краї якого є графічним проявом ефекту „вертикальної дотичної площини" при числових обчисленнях. Сферами позначено положення точок S і T.

Для усунення цього ефекту було складено нову версію алгоритму визначення відбивальної поверхні. Модифікована версія алгоритму базується на розв'язанні складеного диференціального рівняння

$$y_T\left(z\frac{\partial z}{\partial x} + x\right) - x_T\left(z\frac{\partial z}{\partial y} + y\right) = 0\,. \tag{5}$$

Рівняння (5) одержано з виразів (3) за умови врахування того, що знаменники у них однакові. Було складено MAPLE-програму визначення форми поверхні z(x, y) за допомогою рівняння (5).

На рис. 3. наведено графічний результат виконання програми для того ж самого випадку $T\,(5, 0, 0)$. Зображено фрагмент еліпсоїда; відсутність „обірваності" його країв вказує на стійкість обчислювального процесу. Сферами позначено положення точок S і T.

Аналітичним результатом виконанням програми є визначення функції, яка формально задовольняє диференціальному рівнянню (5)

$$z(x, y) = \sqrt{y^2 + \_\mathrm{F1}(x)}\ . \qquad (6)$$

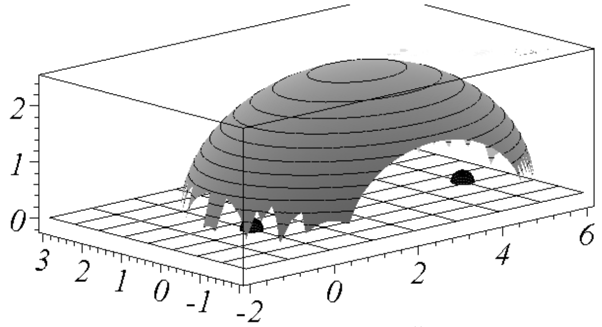

Рис. 2. Результат виконання першої версії програми.

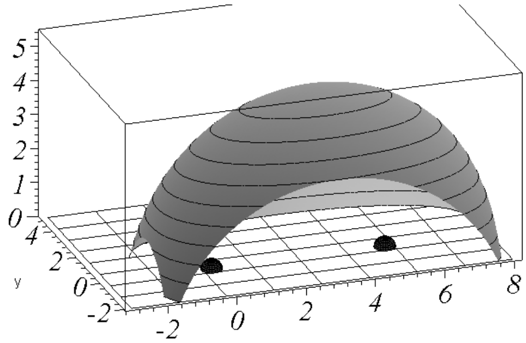

Рис. 3. Результат виконання другої версії програми.

Тут _F1(x) - довільна функція інтегрування, за допомогою якої можна враховувати граничні умови проходження відбивальної поверхні. Наприклад, вважатимемо, що на горизонтальній площині *Oxy* відбивальна поверхня повинна проходити через коло, рівняння якого

$$(x-3)^3 + y^2 = 25. \qquad (7)$$

Так як функція _F1(x) повинна залежати лише від x, то з рівняння (7) виключаємо змінну y:

$$y = \sqrt{25-(x-3)^2}\ . \qquad (8)$$

Підставимо праву частину виразу (8) в формулу (6) замість функції _F1(x). В результаті одержимо рівняння відбивальної поверхні

$$z = \sqrt{-y^2 + \sqrt{(x+2)(8-x)}}\ . \qquad (9)$$

Для узагальнення одержаного результату було визначено відбивальну поверхню для випадку, коли джерело променів розташоване в точці початку координат $S(0, 0, 0)$, а точка-приймач відбитих променів має «літерні» координати $T(x_T, y_T, 0)$.

В результаті виконання другої версії програми одержимо загальний розв'язок рівняння (5) у вигляді:

$$z(x, y) = \frac{1}{y_T}\sqrt{\_F1\left(\frac{xx_T + yy_T}{y_T}\right)y_T^2 + x^2y_T^2 - x^2x_T^2 - 2xyx_Ty_T}\ , \qquad (10)$$

де _F1 - функція інтегрування для врахування граничних умов.

Висновок. За допомогою розв'язання диференціального рівняння (3) та його модифікації (5) можна визначити функцію $z = z(x, y)$, яка входить до опису поверхні - рефлектора в залежності від координат джерела променів - точки $S(x_S\ , y_S, 0)$, і координат приймача відбитого променя - точки $T(x_T, y_T, 0)$.

Література
1. *Подгорный А.Л.* К вопросу создания геометрической модели процесса поступления солнечной радиации на поверхности оболочек./ А.Л. Подгорный, В.И. Запривода // Прикладная геометрия и инженерная графика. – 1987. – Вып. 44.- С. 11 – 15.
2. *Подгорный А.Л.* О множестве отраженных лучей при точечном и линейном освещении./ А.Л. Подгорный, Н.И. Снисаренко // Прикладная геометрия и инженерная графика. – 1969. – Вып. 8.- С. 128 – 134.
3. *Дворецкий А.Т.* Классификация поверхностей концентраторов // Прикладная геометрия и инженерная графика ./ А.Т. Дворецкий – 1996. – Вып. 60. - С. 108 – 110.
4. *Сітабдієва О.Л.* Метод опису квазіеліпсів з розосередженими фокусами / О.Л. Сітабдієва // Труды Таврической государственной агротехнологической академии. – Вып. 4, Т. 29. – Мелитополь: ТГАТА, 2005 – С. 24 - 29.
5. *Сітабдієва О.Л.* Геометричне моделювання квазіеліпсоїдів з неточковими фокусами / О.Л. Сітабдієва // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Вип. 9. – Харків: ХДУХТ, 2005.– С. 122-127.
6. *Тютюнников С.В.* Опис дискретної відбивальної поверхні оптичного концентратора циліндричної форми / С.В. Тютюнников // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2011. – Вип.28. – С. 176-181.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ОТРАЖАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С.В. Тютюнников

***Аннотация* - рассмотрен способ определения уравнения отражательной поверхности с помощью дифференциального уравнения специального вида и его модификации.**

DETERMINING EQUATION REFLECTING SURFACE USING DIFFERENTIAL EQUATIONS

S. Tutunnikov

Summary

The method for determining the equation reflecting surface using a special type of differential equation and its modifications.