УДК 515.2 + 631.3

АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СПРЯЖЕНИХ КІНЕМАТИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ РОБОЧИХ ОРГАНІВ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ МАШИН

Махорін Я.Г., аспірант*,
НТУУ "Київський політехнічний інститут"
Підкоритов А.М., д.т.н.,
Одеський національний політехнічний університет
Юрчук В.П., д.т.н.
НТУУ "Київський політехнічний інститут"
Тел. 098-724-06-17

Анотація **– в статті розглянуто метод аналітичного визначення спряжених кінематичних гелікоїдів, які формують поверхні робочих органів сільськогосподарських машин.**

Ключові слова **– гелікоїд, спряжені кінематичні гелікоїди, аналітичне моделювання, конволютні гелікоїди, евольвентні гелікоїди.**

Постановка проблеми. Застосування інженерних розрахунків поверхонь робочих органів зі всестороннім урахуванням умов роботи техніки і агротехнічних вимог, пред’явлених робочим органам з метою підвищення продуктивності роботи, стає можливим лише при наявності раціональних способів конструювання робочих поверхонь. Це означає, що при розробці нових машин одним з найважливіших напрямів наукового пошуку є процес створення нового методу конструювання робочих органів цих машин.

Розробка аналітичного методу, який використовує комп'ютерну технологію та надає можливість скоротити кількість експериментальних зразків, що виготовляються, і витрачений час на їх виготовлення. Таким чином, конструювання поверхонь ґрунтообробних знарядь є актуальним народногосподарським завданням.

Аналіз останніх досліджень. До основоположників у вирішенні проблеми моделювання спряжених поверхонь, які мають складний профіль, можна віднести А.П. Котельникова і Е. Штуді, які вводять метод опису кінематичних гвинтів за допомогою комплексних чисел з множником ω і формулюють принцип перенесення.

---
* Науковий керівник: д.т.н., професор Юрчук В.П.

Але тільки з 1947 року почали з'являтися роботи із застосування гвинтового числення до проблем технічної механіки (теорія шарнірних механізмів, теорія зубчатих зчеплень). До цих робіт відносяться роботи Діментберга Ф.М., Кисліцина С.Г., Літвіна Ф.Л. та деяких інших вчених [3].

Формулювання цілей статті. Метою статті є отримання ефективного методу моделювання спряжених кінематичних гелікоїдів. Саме аналітичний метод моделювання буде корисним при виготовленні експериментальних зразків робочих органів машин на станках з ЧПК.

Основна частина. Аналітичне моделювання спряжених кінематичних гелікоїдів H_A і H_B грунтується на теоремі професора А. М. Підкоритова [1] та рівняння:

$$\begin{cases} X_b = x(\tau)[\mu\lambda(1-\cos\varphi)-\nu\sin\varphi]+y(t)[\nu\lambda(1-\cos\varphi)+\mu\sin\varphi]+ \\ \quad z(\tau)[\lambda^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi]+x_0[\nu\sin\varphi-\mu\nu(1-\cos\varphi)]+ \\ \quad y_0[-\mu\sin\varphi-\nu\lambda(1-\cos\varphi)]+z_0[(1-\lambda^2)(1-\cos\varphi)]+h_a(\varphi\lambda)\,; \\ Y_b = x(\tau)[\mu^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi]+y(t)[\mu\nu(1-\cos\varphi)-\lambda\sin\varphi]+ \\ \quad z(\tau)[\mu\lambda(1-\cos\varphi)+\nu\sin\varphi]+x_0[(1-\mu^2)(1-\cos\varphi)]+y_0[\lambda\sin\varphi- \\ \quad \mu\nu(1-\cos\varphi)]+z_0[-\nu\sin\varphi-\mu\lambda(1-\cos\varphi)]+h_a(\varphi\mu)\,; \\ Z_b = x(\tau)[\mu\nu(1-\cos\varphi)+\lambda\sin\varphi]+y(t)[\nu^2(1-\cos\varphi)+\cos\varphi]+ \\ \quad z(\tau)[\nu\lambda(1-\cos\varphi)-\mu\sin\varphi]+x_0[-\lambda\sin\varphi-\mu\nu(1-\cos\varphi)]+ \\ \quad y_0[(1-\nu^2)(1-\cos\varphi)]+z_0[\mu\sin\varphi-\nu\lambda(1-\cos\varphi)]+h_a(\varphi\nu)\,. \end{cases} \qquad (1)$$

Формула (1) формулює загальний метод аналітичного визначення спряжених кінематичних гелікоїдів. Нехай заданий гелікоїд H_A, тобто задані його вісь i, кут $\alpha_A = A^{\text{I}}AA^{\text{II}}$ і відстань $\Gamma_A = OA$ між його твірною OO^{I} і віссю AA^{I}, а також параметр гвинта h_A. (рис. 1) Знайдемо гелікоїд, який утворює із заданим гелікоїдом H_A спряжену пару з лінійним дотиком. Для цього необхідно визначити його вісь $j \equiv BB^{\text{I}}$, тобто визначити відстань $S_B = B_1B$, $\Gamma_B = OB_1$, і кути $\alpha_B = B_1^{\text{I}}BB^{\text{I}}$, $\beta_B = B_2BB^{\text{II}}$. Виберемо наступну систему координат (рис. 1):

Вісь OX направимо за характеристикою OO^{I} гелікоїдів H_A і H_B, вісь OY направимо по найкоротшому відрізку прямої, яка сполучає вісь AA^{I} і твірну OO^{I} гелікоїда H_A, а вісь OZ - перпендикулярно осям OY і OX. Та задамо твірну OO^{I} параметричним рівнянням наступного виду: $Y = 0;\quad Z = 0;\quad X = \delta,$

де параметр δ – відстань від точки на прямій OO^{I} до точки O – початку координат. Тоді координати цієї точки у початковий момент (при φ=0), яка здійснює гвинтовий рух разом з твірною OO^{I} навколо осі AA^{I}, можуть бути знайдені по формулі (1), де :

$$Y_0 = \Gamma_A; \qquad Z_0 = 0; \qquad X_0 = 0;$$
$$Y = 0; \qquad Z = 0; \qquad X = \delta;$$
$$\mu = 0; \qquad \nu = \sin\alpha_A; \qquad \lambda = \cos\alpha_A;$$

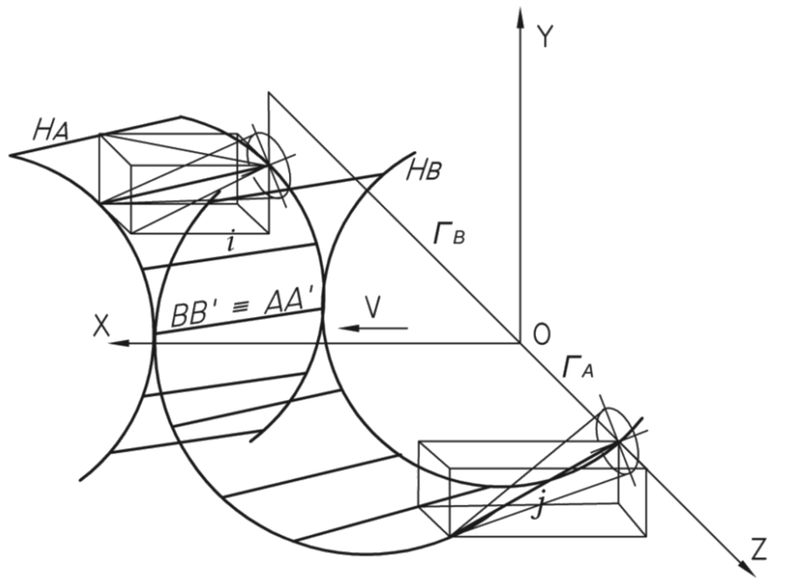

Рис. 1. Спрощена схема розміщення спряжених конволютних гелікоїдів.

Підставляючи ці значення в (1), знайдемо рівняння гелікоїда H_A :

$$\begin{cases} X_A = \delta[\cos^2\alpha_A(1-\cos\varphi)+\cos\varphi] + \Gamma_A\sin\alpha_A\sin\varphi + h_A\varphi\cos\alpha_A\,; \\ Y_A = \delta\cdot\sin\alpha_A\cdot\sin\varphi + \Gamma_A\cdot(1-\cos\varphi)\,; \\ Z_A = \delta\cdot\sin\alpha_A\cos\alpha_A(1-\cos\varphi) - \Gamma_A\cos\alpha_A\cdot\sin\varphi + h_A\varphi\cdot\sin\alpha_A\,. \end{cases} \tag{2}$$

Аналогічно, підставляючи в (1) значення:

$$X_0 = 0; \qquad Y_0 = -\Gamma_B; \qquad Z_0 = S_B;$$
$$X = \delta; \qquad Y = 0; \qquad Z = 0;$$
$$\lambda = -\cos\alpha_B\cdot\cos\beta_B; \qquad \mu = \sin\beta_B \qquad \nu = \sin\alpha_B\cdot\cos\beta_B;$$

знайдемо рівняння гелікоїда загального вигляду:

$$\begin{cases} X_B = \delta[\sin\beta_B\,(-\cos\alpha_B\cdot\cos\beta_B)\,(1-\cos\Psi) - \sin\alpha_B\cdot\cos\beta_B\sin\Psi] - \\ \quad \Gamma_B[-\sin\beta_B\sin\Psi + \sin\alpha_B\cdot\cos\beta_B\cos\alpha_B\cdot\cos\beta_B\,(1-\cos\Psi)] + \\ \quad S_B[(1-(\cos\alpha_B\cdot\cos\beta_B)^2)(1-\cos\Psi)] - h_B(\varphi\cos\alpha_B\cdot\cos\beta_B)\,; \\ Y_B = \delta[\sin{\beta_B}^2\,(1-\cos\Psi)+\cos\Psi] - \Gamma_B[-\cos\alpha_B\cdot\cos\beta_B\sin\Psi - \\ \quad \sin\beta_B\sin\alpha_B\cdot\cos\beta_B\,(1-\cos\Psi)] + S_B[-\sin\alpha_B\cdot\cos\beta_B\sin\Psi - \\ \quad \sin\beta_B\,(-\cos\alpha_B\cdot\cos\beta_B)\,(1-\cos\Psi)] + h_B(\Psi\sin\beta_B)\,; \\ Z_B = \delta[\sin\beta_B\sin\alpha_B\cdot\cos\beta_B\,(1-\cos\Psi) - \cos\alpha_B\cdot\cos\beta_B\sin\Psi] - \\ \quad \Gamma_B[(1-(\sin\alpha_B\cdot\cos\beta_B)^2)(1-\cos\Psi)] + S_B[\sin\beta_B\sin\Psi + \sin\alpha_B\cdot \\ \quad \cos\beta_B\cos\alpha_B\cdot\cos\beta_B\,(1-\cos\Psi)] + h_B(\Psi\sin\alpha_B\cdot\cos\beta_B)\,; \end{cases} \tag{3}$$

Припускаючи, що в (2) і (3) φ=0, отримаємо рівняння загальної твірної гелікоїдів H_A і H_B .

Щоб знайти ті співвідношення параметрів конгруентних гелікоїдів, які випливають з умови утворення ними спряжених пар з лінійним дотиком гелікоїдів H_A і H_B , знайдемо вектори, дотичні до криволінійних координатних сіток на поверхні H_A і H_B в точках твірної $OO^{|}$. Позначимо ці вектори через $\bar{T}_A\delta$, $\bar{T}_A\varphi$ і $\bar{T}_A\Psi$. Візьмемо часткові похідні по δ і φ, і приймемо φ=0:

$$\begin{cases} X_A\delta = (\frac{dX_A}{d\delta})_{\varphi=0} = 1 \,; \\ Y_A\delta = (\frac{dY_A}{d\delta})_{\varphi=0} = 0 \,; \\ Z_A\delta = (\frac{dZ_A}{d\delta})_{\varphi=0} = 0 \,; \text{ тоді маємо:} \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} X_A\varphi = (\frac{dX_A}{d\varphi})_{\varphi=0} = \Gamma_A \sin\alpha_A + h_A \cos\alpha_A \;; \\ Y_A\varphi = (\frac{dY_A}{d\varphi})_{\varphi=0} = \delta \sin\alpha_A \;; \\ Z_A\varphi = (\frac{dZ_A}{d\varphi})_{\varphi=0} = -\Gamma_A \cos\alpha_A + h_A \sin\alpha_A \;; \end{cases} \tag{5}$$

Аналогічно знаходимо:

$$X_B\delta = 1; \quad Y_B\delta = 0; \quad Z_B\delta = 0; \tag{6}$$

та:

$$\begin{cases} X_B\Psi = -\Gamma_B \sin\alpha_B \cos\beta_B - S_B \sin\beta_B - \cos\alpha_B \cos\beta_B; \\ Y_B\Psi = \delta \sin\alpha_B \cos\beta_B - S_B \cos\alpha_B \cos\beta_B + h_B \sin\beta_B; \\ Z_B\Psi = -\delta \sin\beta_B - \Gamma_B \cos\alpha_B \cos\beta_B + h_B \sin\alpha_B \cos\beta_B \,; \end{cases} \tag{7}$$

Використовуючи вектори $\bar{T}_A\delta$, $\bar{T}_A\varphi$ і $\bar{T}_B\delta$, $\bar{T}_B\varphi$, знайдемо вектори $\bar{N}_A$ і $\bar{N}_B$, нормальні до поверхонь гелікоїдів H_A і H_B в точках твірної $OO^{|}$. Очевидно, що:

$\bar{N}_A = \bar{T}_A\delta \cdot \bar{T}_A\varphi$; $\bar{N}_B = \bar{T}_B\delta \cdot \bar{T}_B\Psi$. Звідки:

$$\bar{N}_A = \begin{vmatrix} k & i & j \\ X_A\delta & Y_A\delta & Z_A\delta \\ X_A\varphi & Y_A\varphi & Z_A\varphi \end{vmatrix} \qquad \bar{N}_B = \begin{vmatrix} k & i & j \\ X_B\delta & Y_B\delta & Z_B\delta \\ X_B\Psi & Y_B\Psi & Z_B\Psi \end{vmatrix}$$

Підставляючи сюди (4) і (5), а також (6) і (7) знаходимо: $\bar{N}_A = \bar{\imath}(-\Gamma_A \cos\alpha_A) - h_A \sin\alpha_A) - \bar{\jmath}(\delta \sin\alpha_A)$, та

$\bar{N}_B = \bar{\imath}(-\delta \sin\beta_B - \Gamma_B \cos\alpha_B \cos\beta_B + h_B \sin\alpha_B \cos\beta_B) -$
$\bar{\jmath}(\delta \sin\alpha_B \cos\beta_B - S_B \cos\alpha_B \cos\beta_B + h_B \sin\beta_B)$;

Враховуючи, що в кожній точці загальної твірної гелікоїдів H_A і H_B відбувається їх дотик, то вектори $\bar{N}_A$ і $\bar{N}_B$ набудуть вигляду:

$k(-\Gamma_A \cos\alpha_A + h_A \sin\alpha_A) = -\delta \sin\beta_B - \Gamma_B \cos\alpha_B \cos\beta_B + h_B \sin\alpha_B \cos\beta_B$;

$k\,\delta \sin\alpha_A = \delta \sin\alpha_B \cos\beta_B - S_B \cos\alpha_B \cos\beta_B + h_B \sin\beta_B$, при деякому $k \neq 0$.

Ділячи перше з цієї рівності на друге та помноживши на δ, отримаємо рівняння, що визначає умову спряження:

$$h_A - \Gamma_A \cot\alpha_A = \frac{-\delta \cdot \sin\beta_B - \Gamma_B \cos\alpha_B \cos\beta_B + h_B \sin\alpha_B \cos\beta_B}{\delta \sin\alpha_B \cos\beta_B - S_B \cos\alpha_B \cos\beta_B + h_B \sin\beta_B} \cdot \delta. \qquad (8)$$

Яке має бути справедливе при усіх δ. Підставивши у рівняння (8) значення:

$S_B = 0$; $\beta_B = 0$, отримаємо рівняння, яке визначає часткову умову спряження [2], якій повинні задовольняти параметри α_B, Γ_B і h_B гелікоїда H_B.

$$h_B - \Gamma_B \cot\alpha_B = h_A - \Gamma_A \cot\alpha_A. \qquad (9)$$

Підставляючи знайдені значення S_B і β_B у (3) отримаємо наступні параметричні рівняння гелікоїда H_B:

$$\begin{cases} X_B = \delta[\cos^2\alpha_B\,(1 - \cos\Psi) + \cos\Psi] - \Gamma_B \sin\alpha_B \sin\Psi - h_B\Psi \cos\alpha_B; \\ Y_B = \delta \cdot \sin\alpha_B \cdot \sin\Psi - \Gamma_B(1 - \cos\Psi); \\ Z_B = -\delta \cdot \sin\alpha_B \cos\alpha_B\,(1 - \cos\Psi) - \Gamma_B \cos\alpha_B \sin\Psi + h_B\Psi \sin\alpha_B. \end{cases} \qquad (10)$$

При цьому помітимо, що умова (9) була єдиною умовою, накладеною на параметри Γ_B, α_B і h_B гелікоїда H_B. Щоб визначити їх однозначно, необхідні додаткові умови, наприклад, дані про тип гелікоїда, характер спряження з точки зору кінематики (кочення, кочення з ковзанням вздовж твірних, ковзання вздовж та поперек твірних), а також інформація про передатне відношення $i = \frac{\omega_A}{\omega_B}$, здійснюване відповідним фрикційним зачепленням.

У останньому випадку параметри φ і Ψ гелікоїдів H_A і H_B пов'язані співвідношенням $\Psi = i\varphi$. Підставляючи це співвідношення в (7) і вважаючи $S_B = \beta_B = 0$ (часткові похідні беремо по φ), отримаємо:

$$\begin{cases} X_{B\varphi} = (\frac{dX_B}{d\varphi})_{\varphi=0} = -i(\Gamma_B \sin\alpha_B + h_B \cos\alpha_B)\ ; \\ Y_{B\varphi} = (\frac{dY_B}{d\varphi})_{\varphi=0} = i\delta \sin\alpha_B; \\ Z_{B\varphi} = (\frac{dZ_B}{d\varphi})_{\varphi=0} = -i(\Gamma_B \cos\alpha_B - h_B \sin\alpha_B). \end{cases} \qquad (11)$$

Висновки: 1) Умова (9) показує, що спряженими можуть бути лише конволютні гелікоїди та їх особливі види або тільки евольвентні гелікоїди і їх особливі види. 2) Аналітичне моделювання спряжених кінематичних гелікоїдів дозволяє використати його для графічного моделювання із застосуванням комп'ютерних технологій.

Література

1. *Подкорытов А. Н.* Автоматизация, электронное моделирование и исследование интерференции сопряжённых криволинейных поверхностей на базе ЕС ЭЦВМ / А.Н. Подкорытов; науч. ред. И.И. Котов. – Омск: Западно-Сибирское изд-во, 1976. – 167 с.
2. *Підкоритов А. М.* Конструювання спряжених поверхонь вилчатих та дискових копачів шляхом застосування діаграми гвинта / А.М. Підкоритов, В.П. Юрчук // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КГТУСА, 1994. – Вип. 55. – С. 28–29.
3. *Люкшин В. С.* Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов / В.С. Люкшин. - М.: Машиностроение, 1967. – 372 с.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ГЕЛИКОИДОВ, КОТОРЫЕ ФОРМИРУЮТ ПОВЕРХНОСТИ РАБОЧИХ ОРГАНОВ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ МАШИН

Я.Г. Махорин, А.М. Подкорытов, В.П. Юрчук

Аннотация **- в статье рассмотрен метод аналитического определения сопряженных кинематических геликоидов, которые формируют поверхности рабочих органов сельскохозяйственных машин.**

ANALYTICAL MODELING CONJUGATED KINEMATICS HELICOIDS THAT FORM THE WORK SURFACE OF AGRICULTURAL MACHINERY

Y. Machorin, A. Pidkoritov, V. Yurchuk

Summary

The method of analytical determination conjugated kinematics helicoids that form the work surface of agricultural machinery.