УДК 515.2

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЕЛІПСІВ НА ПЛОЩИНІ РІВНЯ, ЯКІ ЗАБЕЗПЕЧУЮТЬ ЗАДАНІ ЗНАЧЕННЯ ЛОКАЛЬНИХ КУТОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ВИПРОМІНЮВАННЯ

Самарін В.О.*
Національний університет цивільного захисту України (Харків)
Тел. 099-242-07-04

***Анотація* - розроблено спосіб виявлення параметрів еліпса на площині рівня, коли цей еліпс обирається серед множини подібних еліпсів.**

***Ключові слова* - променеве випромінювання, локальні кутові коефіцієнти випромінювання, площина рівня, еліпс максимальної площі.**

Постановка проблеми. На практиці при розробці технологічних конструкцій досить часто доводиться забезпечувати розподіл температурного поля згідно заданого закону, що є актуальним завданням для теплопостачання і теплофікації, теплоенергетики та будівельного комплексу. Характерним прикладом є розподіл поля температур при виробленні листового скла у фазі його застигання. При цьому потужний тепловий потік передається від джерела тепла до навколишніх об'єктів безконтактно - тобто променевим способом. Тоді виникає потреба забезпечити задане (як правило, рівномірне) поле температур. Тому актуальними будуть дослідження, спрямовані на розробку (переважно наближеного) способу забезпечення рівномірного розподілу температурного поля.

Аналіз останніх досліджень. В роботах Д.В. Кукурузи [1] наведено спосіб розв’язання оберненої задачі теплопередачі. Суть його полягає в такому. Нехай на координатній площині *Oxy* задано точку-теплоприймач з координатами (x_0, y_0). Апріорі зажадаємо, щоб значення локального ККВ в цій точці дорівнювало λ. Щоб досягти цього слід вважати, що RP-проекція джерела тепла має форму круга радіуса $r = \sqrt{\lambda}$ з центром в точці (x_0, y_0). Параметричне рівняння кола круга має вигляд:

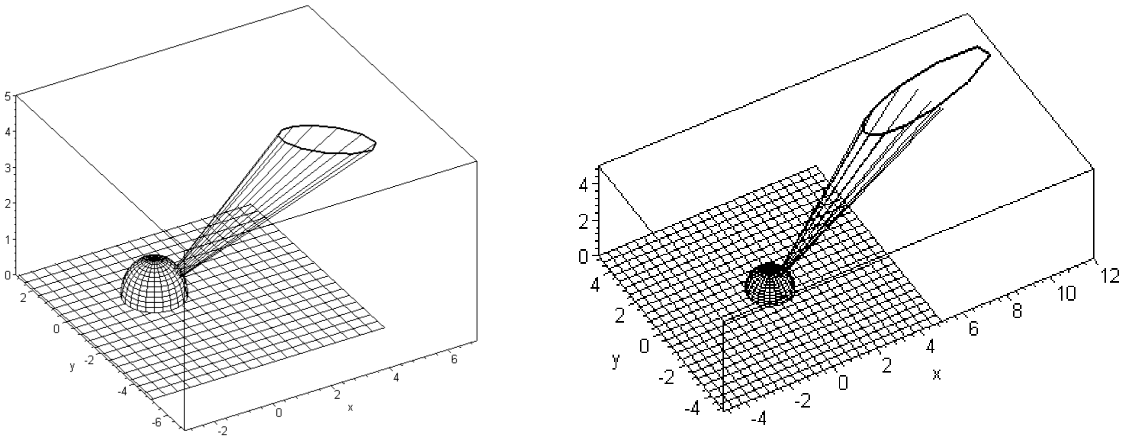
$$x_{RP}(t) = x_0 + r\cos(t); \quad y_{RP}(t) = y_0 + r\sin(t);\ (0 \le t \le 2\pi). \qquad (1)$$

Нехай RP-проекція фігури описана у вигляді (1). Тоді на площині рівня $z = z_P$ маємо параметричне рівняння

* Науковий керівник: д.т.н., професор Шоман О.В.

$$\varphi(t)=\frac{x_{RP}z_p}{\sqrt{1-x_{RP}^2-y_{RP}^2}};\ \psi(t)=\frac{y_{RP}z_p}{\sqrt{1-x_{RP}^2-y_{RP}^2}}. \qquad (2)$$

На рис. 1 зображено фігури (джерела тепла) на допоміжній площині $z = 5$, які мають забезпечити рівні значення локальних ККВ, тому що в них RP-проекції будуть однакові.



$x_0 = 0{,}5$; $y_0 = -0{,}5$; $w = 5$; $x_0 = 0{,}8$; $y_0 = 0{,}2$; $w = 5$;

Рис. 1. Приклади фігур на площині z = 5,
які забезпечать однакові значення локальних ККВ.

Значення локального ККВ r^2 забезпечують елементи сім’ї фігур на площині рівня $z = w$ і описаних рівняннями [2]:

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=w\frac{x_0+r\cos t}{\sqrt{1-r^2-x_0^2-y_0^2-2x_0r\cos t-2y_0r\sin t}};\\ \psi(t)&=w\frac{y_0+r\cos t}{\sqrt{1-r^2-x_0^2-y_0^2-2x_0r\cos t-2y_0r\sin t}},\end{aligned} \qquad (3)$$

де $w > 1$; $r << 1$; $x_0^2 + y_0^2 \le (1 - r)^2$.

Для визначеності r доцільно фіксувати і обрати, наприклад, $r = 0{,}1$. Тоді локальний ККВ в точці початку координат дорівнюватиме $\lambda = 0{,}01$. Цей випадок <u>пропонується назвати канонічним</u> і використовувати його для оцінки потоку, що випромінюється фігурою B - джерелом на площині рівня потрапляє в точку фігури A – теплоприймача. На рис. 2 зображено фігури на площині z = 5, об’єднання яких повинно забезпечити значення $\lambda = 0{,}05$ локального ККВ в точці початку координат [1].

Формулювання цілей статті. Розробити спосіб виявлення параметрів еліпса на площині рівня, коли цей еліпс обирається серед множини подібних еліпсів.

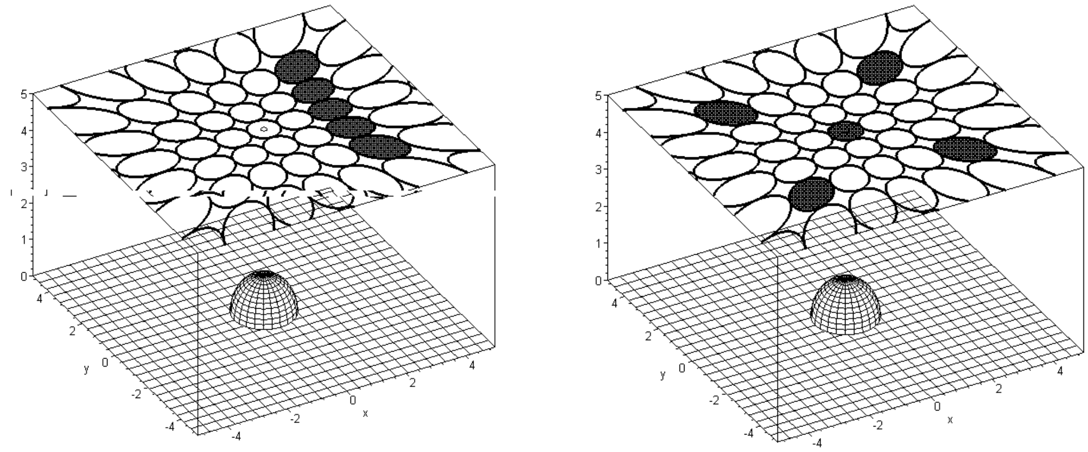


Рис. 2. Об'єднання фігур на площині z = 5, що забезпечує λ = 0,05.

Основна частина. Розв'яжемо задачу опису рівнянням еліпса з центром в початку координат за допомогою координат характерних точок - тобто точок дотику еліпса з прямокутником (рис. 3).

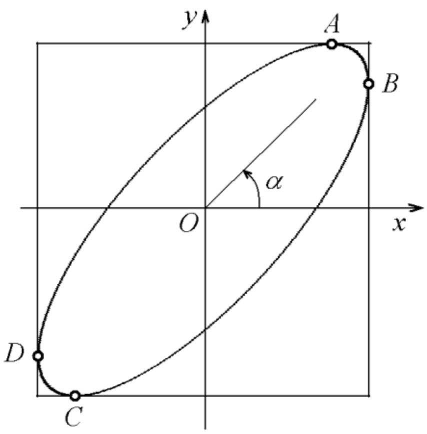


Рис. 3. Характерні точки для еліпса.

В системі координат *Oxy* задамо еліпс рівняннями:

$$x = a\cos t;\ y = b\sin t. \tag{4}$$

За допомогою формул перетворення:

$$X = x\cos\alpha - y\sin\alpha;\ Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

повернемо еліпс на кут α. Спочатку розв'яжемо *пряму задачу* - визначити координати характерних точок A, B, C і *D*.

Для опису точки *B* обчислимо похідну *dX/dt* та знайдемо корінь $t_0 = -arctg\left(\dfrac{b\,tg\alpha}{a}\right)$ і підставимо в опис (4). В результаті одержимо вирази для обчислення координат точки *B*, в залежності від великої *a* і малої *b* півосей та кута α повороту еліпса:

$$x_B = \frac{|a|\cos\alpha\left[\left(a^2 - b^2\right)\cos^2\alpha + b^2\right]}{\sqrt{\left(a^2 + b^2\right)\cos^2\alpha + b^2}};\ y_B = \frac{|a|\cos\alpha\left[\left(a^2 - b^2\right)\sin^2\alpha\right]}{\sqrt{\left(a^2 - b^2\right)\cos^2\alpha + b^2}}. \tag{5}$$

Для визначення координат точки *A* обчислимо похідну *dY/dt* та знайдемо її корінь $t_0 = \mathrm{arctg}\left(\frac{b\,\mathrm{tg}\alpha}{a}\right)$, який підставимо в описи *X* і *Y*.

В результаті одержимо вирази для обчислення координат точки А:

$$x_A = \frac{|a||sin\,\alpha|[(a^2-b^2)cos\,\alpha]}{\sqrt{(a^2-b^2)cos^2\alpha - a^2}};\ y_A = |a||sin\,\alpha|[(a^2-b^2)cos^2\alpha - a^2]. \quad (6)$$

Зваживши на те, що шукана крива апріорі за побудовою є еліпсом, то координати точки *D* дотику з лівою дотичною, паралельною осі *Oy*, можна обчислити за формулами *xD* = - *xB* і *yD* = -*yB*, а координати точки *C* дотику з нижньою дотичною, паралельною осі *Ox*, можна обчислити за формулами *xC* = - *xA* і *yC* = -*yA*. Також можна обчислити координати центра еліпса у «глобальній» системі координат: *xO* = (*xB* - *xD*)/2; *yO* = (*yA* – *yC*)/2. Таким чином, координати всіх точок дотику визначено через параметри повернутого еліпса *a*, *b* і α.

Далі розв’яжемо *обернену задачу* - визначити параметри повернутого еліпса a, b і α, використовуючи вирази для координат *xA = U, yA = V* і *xB = W*.

Для обчислення параметрів *a*, *b* і α складемо систему рівнянь [3]:

$$\begin{aligned} &\frac{|a||sin\,\alpha|[(a^2-b^2)cos\,\alpha]}{\sqrt{(a^2-b^2)cos^2\alpha - a^2}} = U; \\ &|a||sin\,\alpha|[(a^2-b^2)cos^2\alpha - a^2] = V; \\ &\frac{|a|cos\,\alpha[(a^2-b^2)cos\,\alpha + b^2]}{\sqrt{(a^2-b^2)cos^2\alpha + b^2}} = W. \end{aligned} \quad (7)$$

У середовищі процесора Maple розв’язок системи (5) має вигляд:

$$a := \mathrm{RootOf}(\_Z^2 + \mathrm{RootOf}(\_Z^4 + (-W^2 - V^2)\,\_Z^2 - V^2U^2 + W^2V^2)^2 - W^2 - V^2)$$

$$b := \mathrm{RootOf}(\_Z^4 + (-W^2 - V^2)\,\_Z^2 - V^2U^2 + W^2V^2)$$

$$\begin{aligned} alf := &\arctan(\mathrm{RootOf}((-2W^2V^2 + 4V^2U^2 + W^4 + V^4)\,\_Z^2 + W^2V^2 \\ &+ \mathrm{RootOf}(\_Z^4 + (-W^2 - V^2)\,\_Z^2 - V^2U^2 + W^2V^2)^2\,V^2 - V^4 - 2V^2U^2 \\ &- \mathrm{RootOf}(\_Z^4 + (-W^2 - V^2)\,\_Z^2 - V^2U^2 + W^2V^2)^2\,W^2),\ V\,U/(\mathrm{RootOf}(\\ &(-2W^2V^2 + 4V^2U^2 + W^4 + V^4)\,\_Z^2 + W^2V^2 \end{aligned}$$

Використовуючи координати точок *xA=U, yA=V* і *xB=W*, параметри повернутого еліпса можна обчислити за формулами:

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{2W^2 + 2V^2 - 2\sqrt{W^4 - 2V^2W^2 + V^4 + 4V^2U^2}};$$

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{2W^2 + 2V^2 + 2\sqrt{W^4 - 2V^2W^2 + V^4 + 4V^2U^2}}; \qquad (8)$$

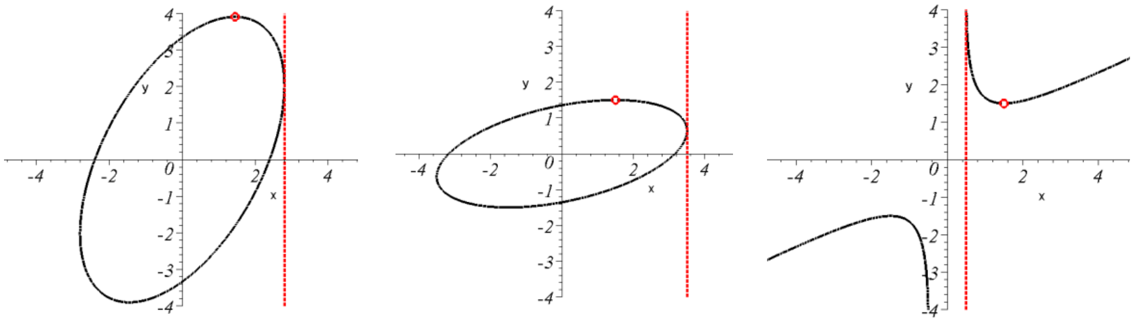
$$\alpha = arctan(\lambda, \mu) = -i\ ln \frac{\mu + i\lambda}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2}};$$

$$де\ \lambda = \frac{\sqrt{W^4 - 2V^2W^2 + V^4 + 4V^2U^2 - (V^2 - W^2)c}}{\sqrt{2}\ c};$$

$$\mu = -\sqrt{2}\frac{UV\ c}{\sqrt{W^4 - 2V^2W^2 + V^4 + 4V^2U^2 - (V^2 - W^2)c}},$$

тут $c = \sqrt{W^4 - 2V^2W^2 + V^4 + 4V^2U^2}$.

На рис. 4 наведено тестові приклади визначення еліпса за складеною програмою.



U=1,45; V=3,9; W=2,8;   U=1,5; V=1,5; W=3,5;   U=1,5; V=1,5; W=0,5;

Рис. 4. Тестові приклади визначення еліпса.

Висновок. Розроблений спосіб дозволяє виявити параметри еліпса на площині рівня, коли цей еліпс обирається серед множини подібних еліпсів.

Література

1. *Кукуруза Д.В.* Геометричне моделювання розподілу значень локальних кутових коефіцієнтів випромінювання на множині точок площини: автореф. дис. … канд. техн. наук: 05.01.01, Київ: КНУБА, 2007. – 19 с.
2. *Куценко Л.Н.* Приближенный метод вычисления локальных угловых коэффициентов излучения /Л.Н. Куценко, О.В. Шоман. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КДТУБА, 1996. – Вип. 60. – С. 46-49.

3. *Піксасов М.М.* Метод визначення еліпса максимальної площі на фазовому портреті коливальної системи: автореф. дисс. … канд. техн. наук: 05.01.01 / М.М. Піксасов. – Харьков: УЦЗУ, 2008. – 18 с.
4. *Самарин В.А.* Геометрическое моделирование равномерного облучения цилиндрической поверхности. / В.А. Самарин // Наука и образование XXI века: сборник статей Международной научно-практической конференции. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. – Ч.2. – С. 197-203.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЛИПСА НА ПЛОСКОСТИ УРОВНЯ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ ЗАДАННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

В.А. Самарин

Аннотация **- разработан способ выявления параметров эллипса на плоскости, когда этот эллипс избирается среди множества подобных эллипсов.**

DEFINITION OF ELLIPSE PARAMETERS ON A LEVEL PLANE, THAT PROVIDE A PREDETERMINED VALUE OF THE LOCAL ARC

V. Samarin

Summary

A method of identifying the parameters of the ellipse on the plane when the ellipse is elected among many similar ellipses is designed.