

УДК 514.18

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ЗАЛЕЖНО ВІД ХАРАКТЕРУ РУШІЙНИХ СИЛ

Семків О.М., к.т.н.

Національний університет цивільного захисту України (Харків)

Тел. 067-724-98-81

Анотація – розроблено *maple*-програму для дослідження вимушених коливань системи у межах теорії малих коливань і з різноманітними характеристиками графіків дій рушійних сил зовнішнього впливу.

Ключові слова – вимушені коливання, функція зовнішнього впливу, графік рушійної сили, сили збурень коливань.

Постановка проблеми. Системи вимушених коливань широко застосовуються у техніці. Тому актуальності набувають розрахунки їх динаміки залежно від графіків дії сил збурень вимушених коливань. Варіанти вимушених коливань проявляються в конструкціях ґрунтометальних машин, призначених для ліквідації низових лісових пожеж в умовах відсутності води [1]. Конструкції зазначених машин передбачають розміщення на спільній платформі трьох джерел осциляцій [2-4]. Перше джерело - розпушувач ґрунту, призначений для підготовки ґрунту до його використання. Друге джерело - вібраційний транспортер, призначений для підйому ґрунту для накопичення у бункері. І третє джерело - радіально-лопатковий металник, призначений для транспортування ґрунту до осередків пожежі шляхом метання. Різноманітного характеру рушійні сили збурень вимушених коливань тут виникають при дії розпушувача ґрунту. При кінцевому часі зовнішнього впливу в лінійній системі відбуваються несталі коливання (початок і припинення роботи розпушувача, гальмування роботи на твердому ґрунті і його нерівностях, робота у перехідних кривих). При тривалому впливі дії збурень у механічній системі можуть виникати сталі коливання (наприклад, при роботі на шляху з геометричними нерівностями).

Аналіз останніх досліджень. Для одержання незатухаючих сталих коливань необхідно ввести який-небудь періодично діючий фактор. У випадку механічних коливань (для наочності - пружинного маятника) роль періодично діючого фактора грає зовнішня рушійна сила $F(t)$, що вимушує коливання. Зазначені коливання описуються [5-8] неоднорідним диференціальним рівнянням

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t. \quad (1)$$

Розв'язок рівняння (1) є сумою загального розв'язку однорідного рівняння й часткового розв'язку неоднорідного рівняння.

Однорідне рівняння $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ має розв'язок

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (2)$$

і описує згасаючі гармонійні коливання з початковою амплітудою A_0 , початковою фазою φ_0 , коефіцієнтом згасання $\beta = \frac{b}{2m}$ і частотою

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \text{ де } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} - \text{частота власних (незатухаючих) коливань}$$

того ж маятника, m -маса маятника, k -коефіцієнт жорсткості пружини. Щоб одержати частковий розв'язок неоднорідного рівняння зручно перетворити [6,7] силу збурення за допомогою формули Ейлера

$$\cos \Omega t = \frac{1}{2} (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}). \quad (3)$$

Тоді неоднорідне диференціальне рівняння набуде вигляду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{2m} (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t}), \quad (4)$$

з частковим розв'язком

$$x = \frac{F_0}{m} \frac{\cos(\Omega t + \varphi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad (5)$$

де початкова фаза обчислюється за формулою $\varphi = -\arctg \frac{2\beta \Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}$.

Отриманий частковий розв'язок (5) диференціального рівняння (4) описує гармонійне коливання із частотою Ω сили збурення з постійною амплітудою, але зміщене в порівнянні із силою на фазу φ .

Тоді повний розв'язок рівняння змушених коливань залежно від

амплітуди $A = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$ прийме вигляд [5,6]:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + A \cos(\Omega t + \varphi). \quad (6)$$

З розв'язку (6) видно, що вимушені коливання являють собою суму двох рухів. А саме, згасаючих коливань із частотою ω , амплітуда яких убиває за експоненціальним законом, а також незатухаючих коливань із постійною амплітудою A і частотою Ω сили збурення. Спільний внесок цих двох коливальних рухів і описує поведіння коливальної системи під дією зовнішньої періодичної сили [5-8].

Формулювання цілей статті. За допомогою складеної Maple - програми дослідити вимушені коливання системи у межах теорії малих коливань і з різними характерами графіків дій рушійних сил зовнішнього впливу.

Основна частина. Було складено базову Maple-програму розв'язання на аналітичному рівні диференціального рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \cos \pi t. \quad (7)$$

Враховуючи позначення констант інтегрування $_C1$ і $_C2$ і синтаксис мови Maple, розв'язок можна представити у вигляді:

$$x(t) = e^{((- \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}) t)} _C2 + e^{((- \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}) t)} _C1 + \frac{(\omega_0^2 - \pi^2) \cos(\pi t) + 2 \pi \sin(\pi t) \beta}{4 \beta^2 \pi^2 + \omega_0^4 - 2 \omega_0^2 \pi^2 + \pi^4}.$$

На рис. 1 зображено графіки функцій сили збурення (позначено точками) і одержаного розв'язку (суцільна лінія) залежно від інтервалу зміни параметра t тут і далі для значень $\beta = 0,025$ і $\omega_0 = 3$.

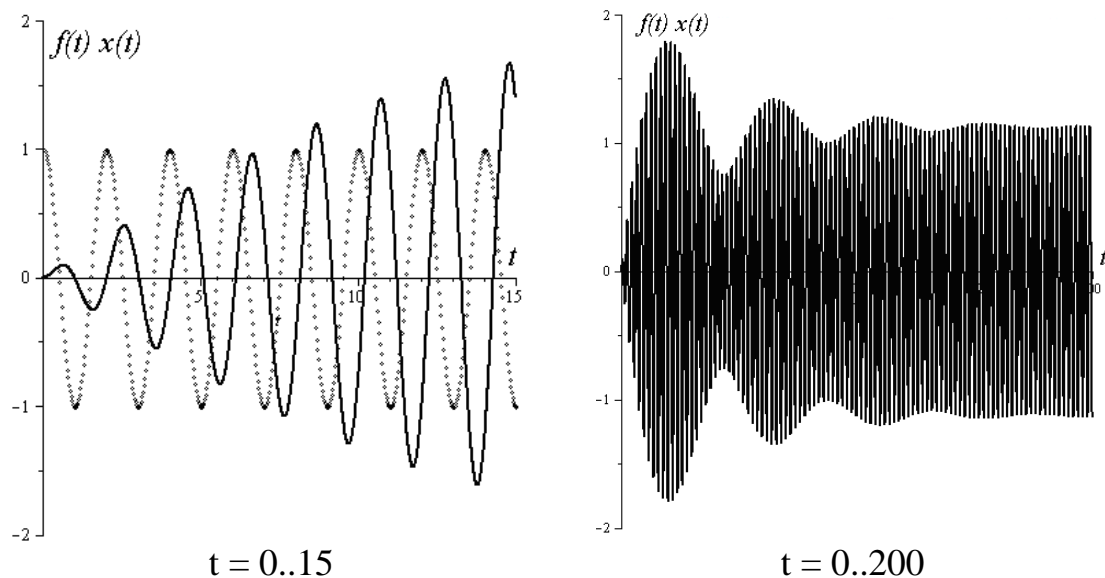


Рис. 1. Графіки функцій «гармонійної» сили збурення і одержаного розв'язку.

Графіки з рис. 1 узгоджуються з відомими результатами [5,6], згідно яких на першому етапі коливань спостерігається додавання двох гармонійних коливань. Шляхом проведення комп'ютерних експериментів зі складеною програмою можна переконатися у тому, що тривалість першого етапу залежить від величини загасання β у коливальній системі. А також, що починаючи з деякого моменту часу, амплітуда згасаючих коливань стає багато меншою амплітуди коливань із частотою сили, що вимушує коливання. Маятник починає здійснювати гармонійні коливання з постійною амплітудою й частотою зазначеної сили. Тобто виникають сталі коливання.

Також було складено програму для розв'язання рівняння

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \cos(\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} t) \quad (8)$$

з метою ілюстрації явища резонансу.

Враховуючи позначення констант інтегрування $_C1$ і $_C2$ і синтаксис мови Maple, розв'язок можна представити у вигляді:

$$x(t) = e^{(-\beta + \sqrt{-\omega_0^2 + \beta^2}) t} _C2 + e^{(-\beta - \sqrt{-\omega_0^2 + \beta^2}) t} _C1 + \frac{\cos(\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} t) \beta + \sin(\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} t) \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{-2\beta^3 + 2\omega_0^2 \beta} .$$

На рис. 2 зображено графіки функцій сили збурення і одержаного розв'язку залежно від інтервалу зміни параметра t для значень $\beta = 0.025$, $\omega_0 = 3$.

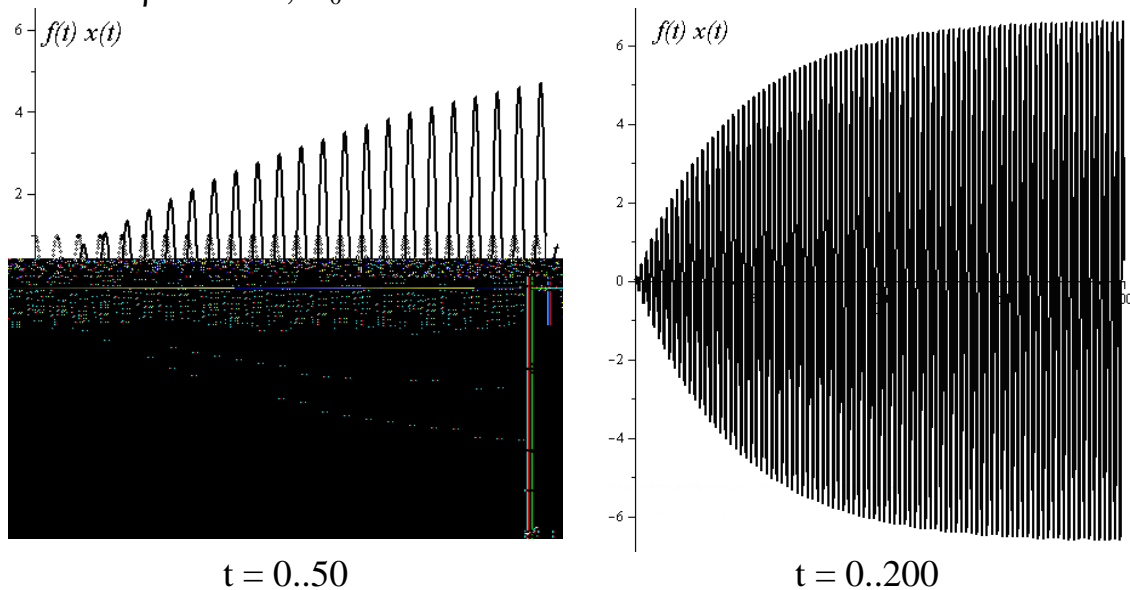


Рис. 2. Графіки функцій сили збурення і одержаного розв'язку у випадку резонансу.

Далі наведемо результати розрахунків з різноманітними характеристиками графіків дій рушійних сил зовнішнього впливу. Буде показано, що при $t > 50$ всі графіки мають однаковий характер, подібний зображеному праворуч на рис. 1. Далі у варіантах наведемо лише графіки початкових фаз вимушених коливань.

Варіант 1. Графік дії сили зовнішнього впливу має «пилкоподібний» вигляд (рис. 3), описати який пропонується за допомоги функції $f = \frac{1}{2} \arcsin(\sin(\pi t))$.

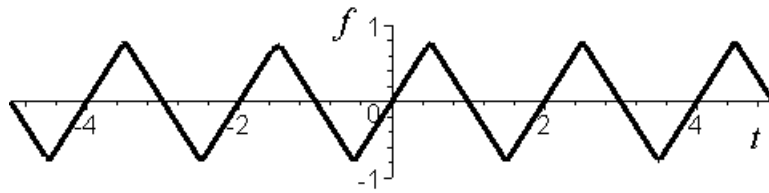


Рис. 3. «Пилкоподібний» графік дії зовнішньої сили.

На рис. 4 наведено графіки функцій сили «пилкоподібного» збурення і одержаного розв'язку.

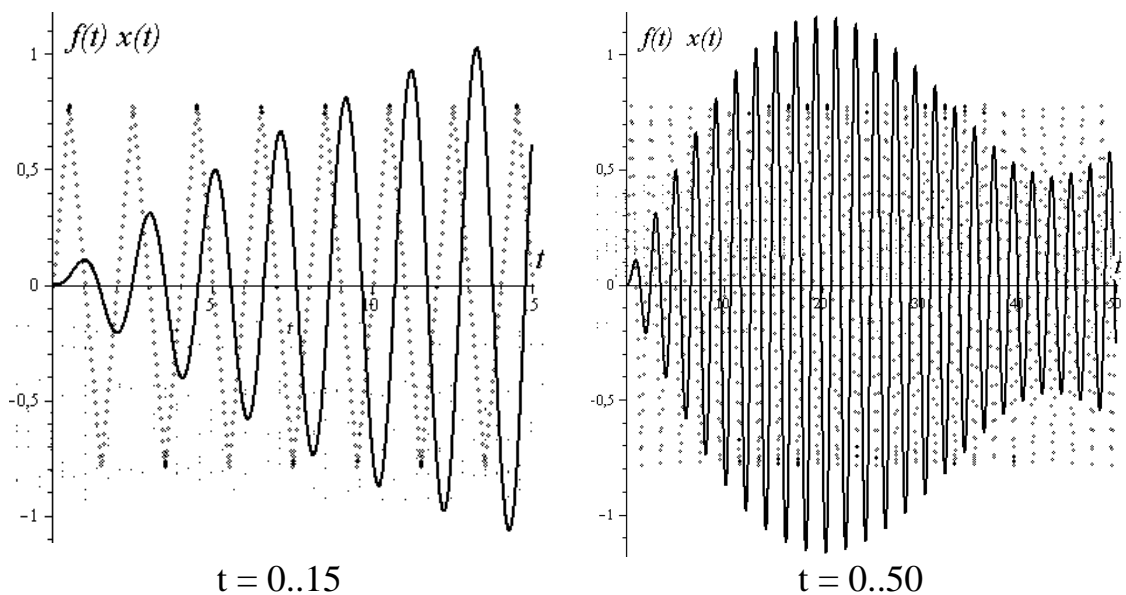


Рис. 4. Графіки функцій сили «пилкоподібного» збурення і одержаного розв'язку.

Варіант 2. Графік дії сили зовнішнього впливу має «меандровий» вигляд (рис. 5), описати який пропонується за допомоги функції $f = \tanh(100 \sin(\pi t))$.

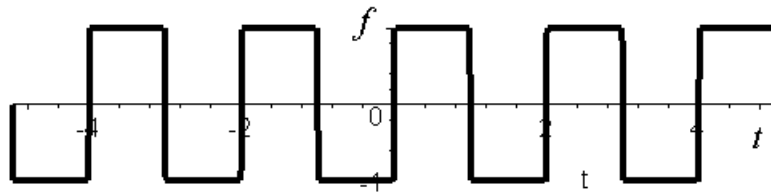
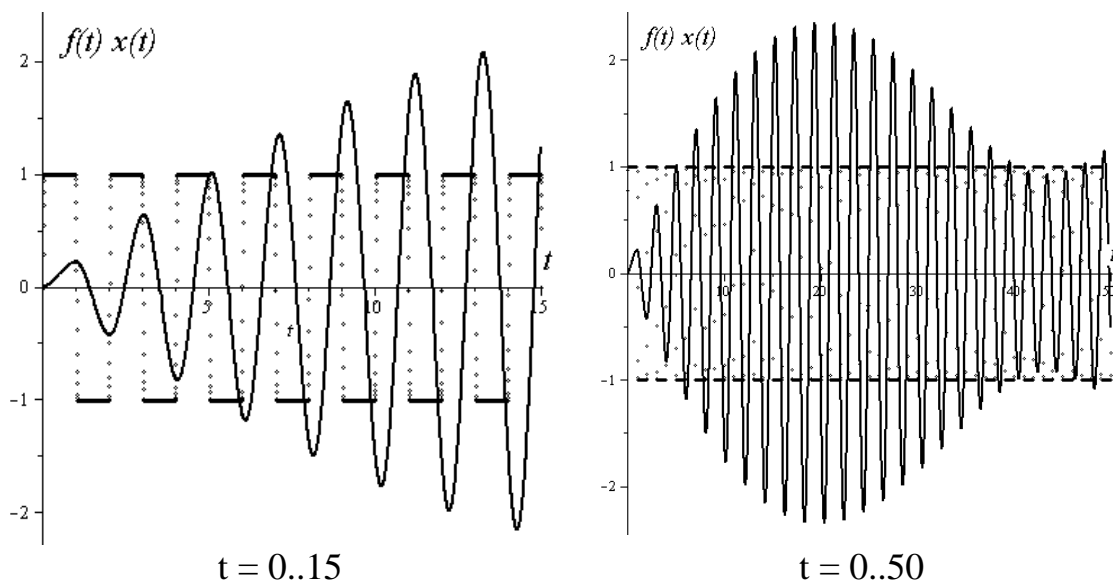


Рис. 5. «Меандровий» графік дії зовнішньої сили.

На рис. 6 наведено графіки функцій сили «меандрового» збурення і одержаного розв'язку.



$t = 0..15$

$t = 0..50$

Рис. 6. Графіки функцій сили «меандрового» збурення і одержаного розв'язку.

Варіант 3. Графік дії сили зовнішнього впливу має «комбінований» вигляд (рис. 7), описати який пропонується за допомоги функції $f = \frac{1}{2}(1 + \tanh(100 \sin(\pi t)))(1 + \cos(\pi t)) - \cos(\pi t)$.

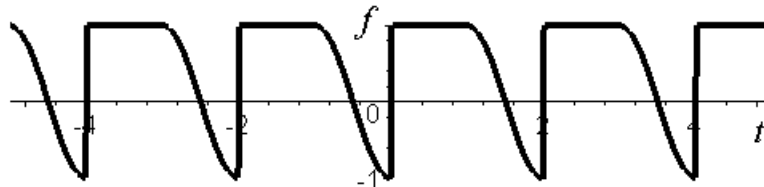


Рис. 7. «Комбінований» графік дії зовнішньої сили.

На рис. 8 наведено графіки функцій сили «комбінованого» збурення і одержаного розв'язку.

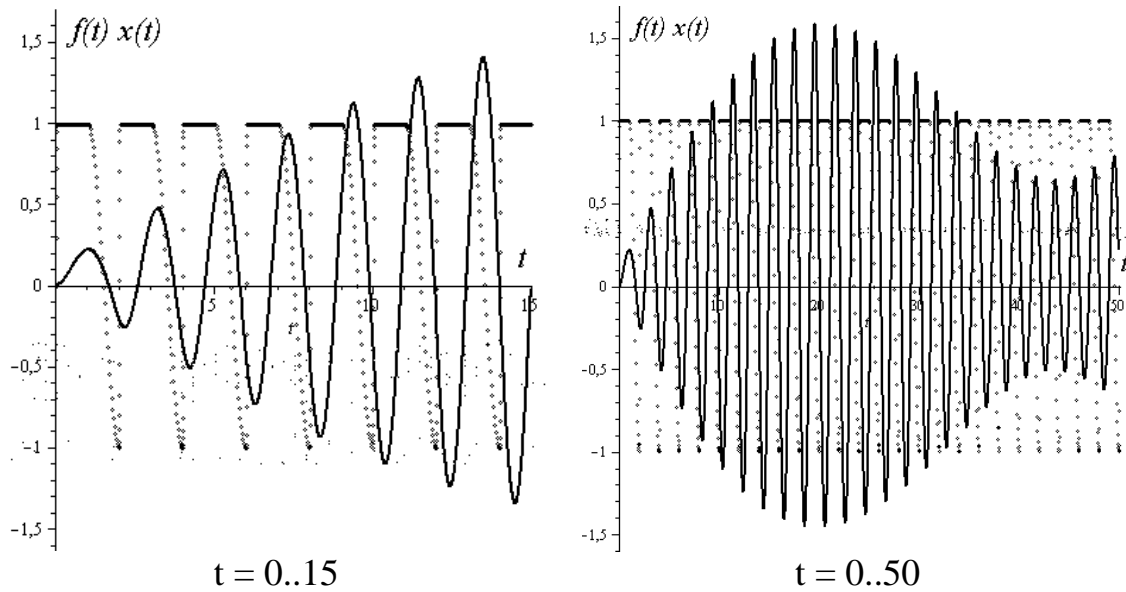


Рис. 8. Графіки функцій сили «комбінованого» збурення і одержаного розв'язку.

Висновок. Розроблена програма дозволяє моделювати вимушені коливання вантажу залежно від функції зовнішнього впливу. Показано, що при великих значеннях t всі графіки мають однаковий характер, подібний зображеному праворуч на рис. 1. Це узгоджується з теоретичними результатами [5,6]. Тому розроблену *maple*-програму можна взяти за основу при обчисленні вимушених коливань для опису процесів у коливальній системі конструкції ґрунтометальної машини. Адже дія розпушувача ґрунту не залежатиме від складу ґрунту (переважно, піску), що суттєво впливає на характер функції зовнішнього впливу вимушених коливань зазначеної конструкції.

Література

1. *Валдайский Н.П.* Тушение лесных низовых пожаров способом метания ґрунта. Метод. Рекомендации. / Н.П. Валдайский, С.М. Вонский, А.Н. Чукичев. – Л.: ЛеНИИЛХ, 1977. – 33 с.
2. *Семків О.М.* Розрахунок робочого органа ланцюгового ґрунтометального механізму / О.М. Семків, В.М. Шатохін // Прикладна геометрія та інженерна графіка: міжвідомчий науково-технічний збірник. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 87.– С. 303-312.
3. *Семків О.М.* Опис руху частки ґрунту по лопатці із профілем брахістохрони у полі відцентрових сил інерції / О.М. Семків, В.М. Шатохін, А.М. Попова // Геометричне та комп'ютерне моделювання: Збірник наукових праць.– Харків: ХДУХТ, 2012. – Вип. 30.– С. 190-200.
4. *Семків О.М.* Дослідження траєкторії руху частки ґрунту після її вильоту з робочої поверхні лопатки роторного ґрунтометальника /

- О.М. Семків, А.М. Попова // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип. 4. – Т. 54. – С. 126-134.
5. *Сивухин Д.В.* Механика / Д.В.Сивухин – М.: Наука, 1989. – 576. с.
 6. *Карлов Н.В.* Колебания, волны, структуры / Н.В.Карлов, Н.А.Кириченко – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 496 с.
 7. *Бутенин И.В.* Теоретическая механика. Т.1-2 / И.В.Бутенин. Я.Д.Лунц, Д.Р.Меркин. – СПб: Лань, 2002. – 730 с.
 8. *Поляхов Н.Н.* Теоретическая механика / Н.Н.Поляхов. С.А. Зегжда, М.П. Юшков.– Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. 1985. – 536 с.
 9. *Эксаревская М.Е.* Введение в Maple и рассмотрение задач теоретической механики / М.Е.Эксаревская, А.С.Чеботарев, О.Г.Корольков - Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2008. – 42 с.
 10. *Кирсанов М. Н.* Maple и MapleT. Решения задач механики: Учебное пособие. / М. Н. Кирсанов – СПб.: Лань, 2012. – 512 с.
 11. *Васильева Л.В.* Компьютерное моделирование процессов с помощью систем компьютерной математики // Л.В.Васильева, О.А.Медведева, И.А.Гетьман / Вісник ЛНУ ім. Т.Шевченка. – Луганськ, 2010. – № 1 (188). – С. 6-12

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ХАРАКТЕРА ДВИЖУЩИХ СИЛ

О.М. Семків

Аннотация – разработана maple-программа для исследования вынужденных колебаний системы в пределах теории малых колебаний и с разнообразными характерами графиков действий движущих сил внешнего влияния.

GEOMETRICAL MODELLING OF THE COMPELLED FLUCTUATIONS DEPENDING ON CHARACTER OF DRIVING FORCES

O. Semkiv

Summary

The maple-program for research compelled system fluctuation within the theory of small fluctuations and with various characters of schedules of actions of driving forces of external influence is developed.