УДК 519.85

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЧЕТКИХ МАТРИЧНЫХ ИГР

Барышевский С.О., к.ф.-м.н.
Мелитопольский государственный педагогический университет им. Богдана Хмельницкого (Украина)

Рассмотрен графоаналитический метод решения матричных игр, в которых элементы платежной матрицы – нечеткие числа с неизвестными функции принадлежности.

Ключевые слова: платежная матрица, нечеткие числа, функция принадлежности, нечеткая прямая, нечеткая геометрия.

Постановка проблемы. Любая конечная матричная игра может быть решена графоаналитически (графически), либо ее решения может быть сведено к решение пары двойственных задач линейного программирования [1]. Однако в случае матричных игр, в которых элементы платежной матрицы представляют собой нечеткие числа, возникает проблема в использовании для решения этих игр симплекс-метода, связанная с делением на нечеткие числа, носитель которых содержит нуль. Эта операция над нечеткими числами неопределенна [2]. Графоаналитический метод применим только для игр, в которых хотя бы у одного из игроков имеется две стратегии. Однако он хорошо иллюстрирует содержательную сторону процесса поиска решения в игре и графически наглядно поясняет основные понятия теории матричных игр. В случаи решения нечетких матричных игр графоаналитическим методом проблем проведения операций над нечеткими числами в основном не возникает. Неопределенность при решение нечетких матричных игр графоаналитическим методом может быть описана с использованием математического аппарата теории нечетких множеств и нечеткой геометрии [3-5].

Анализ последних исследований и публикаций. В работе [1] рассмотрены традиционные методы решения четких и традиционные аналитические методы решения нечетких матричных игр. Рассмотрению игр с нечеткой платежной матрицей посвящена работа [6]. Подход состоит в переходе от нечеткой задачи к двум четким задачам линейного программирования. В работе [7] рассмотрены решения нечетких матричных игр с определенным набором возможных конечных состояний игры, заданных с некоторой нечеткостью. Рассмотрены способы, которые дают возможности свести решения нечеткой задачи к четкой. Рассмотрению возможных технологий аналитического решения задачи теории игр с четкой платежной матрицей посвящена работа [8]. С целью устранения недостатков традиционного метода решения предложена альтернативная процедура, основанная на использовании композиционного критерия, учитывающего меру близости полученного решения к модальному, а также уровень неопределенности в отношении получаемого в результате нечеткого значения цены игры. Указанная процедура сводит исходную задачу к четкой задаче математического программирование, решаемой известными методами.

Формулировка целей статьи. Предлагается рассмотрение графоаналитического метода решения нечетких матричных игр с использованием математического аппарата теории нечетких множеств и нечеткой геометрии.

Основная часть. Основные понятия теории нечетких множеств, нечетких соответствий и отношений, понятия нечетких геометрических объектов и нечетких геометрических фигур на плоскости будем полагать таким же как и в [3-5].

Графоаналитический метод решения нечетких матричных игр состоит из двух частей. Вначале в матричной игре графически выявляются качественные особенности решения, затем полная нечеткая характеристика решения находится аналитически.

Графоаналитический метод вполне пригоден для нечетких матричных игр размерностью $2\times n$ или $m\times 2$.

Рассмотрим вначале случай, когда задана игра размерностью $2\times n$ с платежной матрицей

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Пусть элементы матрицы A – гауссовы нечеткие числа с фнкциями принадлежности

$$\mu(a_{ij})=exp\left\{-\frac{(a_{ij}-a_{ij}^0)^2}{2\sigma_{ij}^2}\right\},$$

где a_{ij}^0– модальные значения (ядра) нечетких чисел a_{ij}, σ_{ij} – коэффициенты концентрации.

Пусть (x_1,x_2) нечеткие оптимальные стратегии игрока 1, (y_1,y_2) – нечеткие оптимальные стратегии игрок 2. Тогда, исключая тривиальный случай (наличие нечеткой чистой оптимальной стратегии хотя бы у одного из игроков), имеем:

$$x_1+x_2=1, x_1>0, x_2>0, y_1+y_2=1, y_1>0, y_2>0\ . \qquad (1)$$

Далее, для удобства, нечеткие точки, нечеткие прямые и нечеткие отрезки будем изображать графически их модальными значениями (ядрами).

Выберем прямоугольную систему координат и отложим на оси абсцисс единичный отрезок для представления нечетких смешанных стратегий игрока 1 (рис. 1).

На концах этого отрезка восстановим два перпендикуляра, на которых будем откладывать нечеткие выигрыши игрока, когда он использует нечеткие чистые стратегии A_2 и A_1.

Пусть игрок 2 выбрал нечеткую стратегию B_1. Тогда при использовании игроком 1 нечеткой чистой стратегии A_2 он получает нечеткий выигрыш a_{21} (соответствующая нечеткая точка на левом перпендикуляре), а при использовании нечеткой чистой стратегии A_1 – нечеткий выигрыш a_{11} (нечеткая точка на правом перпендикуляре). Соединив эти две нечеткие точки нечетким отрезком нечеткой прямой, мы получим график зависимости нечеткого выигрыша игрока 1 $M(x,B_1)$ от нечеткой смешанной стратегии x при условии, что игрок 2 использует нечеткую чистую стратегию B_1 (рис. 1). Точно такие же нечеткие прямые можно построить для $B_1, B_2, ..., B_n$.

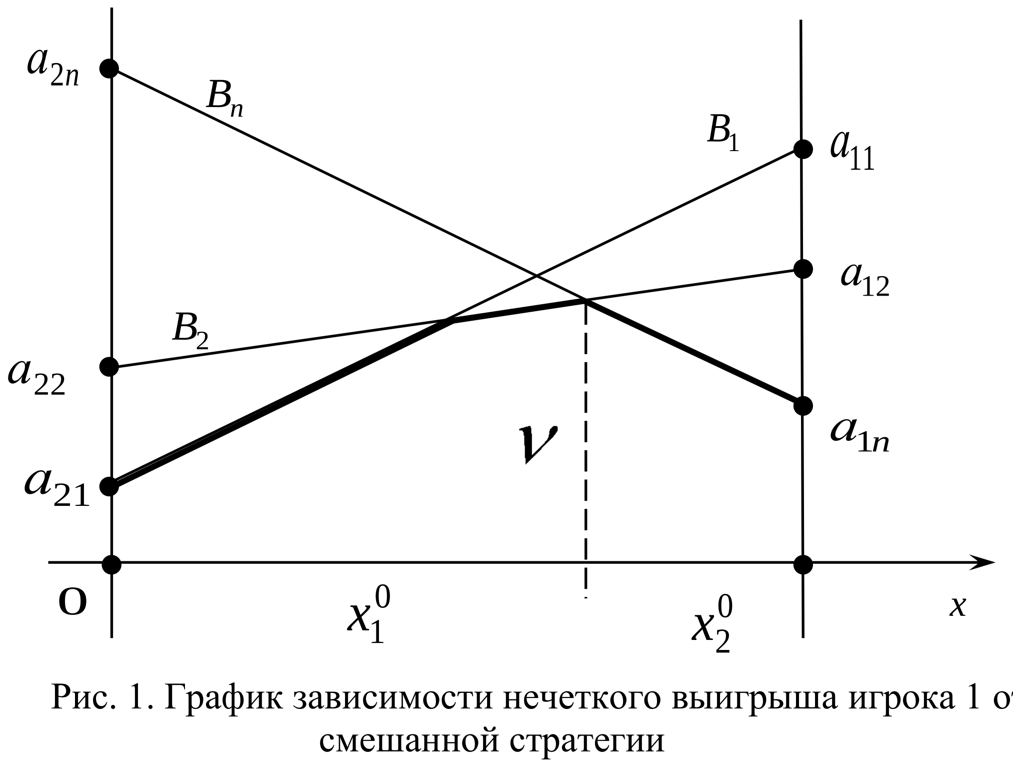

Рис. 1. График зависимости нечеткого выигрыша игрока 1 от смешанной стратегии

Далее мы должны для каждой нечеткой смешанной стратегии *x,* то есть для каждой нечеткой точки нечеткого единичного отрезка на оси абсцисс, найти $\min\limits_{0 \le j \le n} M(x,B_j)$, то есть нечеткую нижнюю границу множества и нечетких прямых. Эта нечеткая граница отмечена жирной нечеткой линией (рис. 1). Та нечеткая точка нечеткого отрезка, при которой нечеткая нижняя граница достигает максимума, соответствует искомой нечеткой смешанной стратегии x^0, высота максимума дает при этом значение нечеткой нижней цены при *x*.

Аналогично можно найти нечетную оптимальную смешанную стратегию игрока 2 и нечеткую нижнюю цену игры γ в нечетных играх $m \times 2$ с той лишь разницей, что здесь нужно искать не максимум нечетной нижней границы, а минимум нечетной верхней границы.

Согласно основной теореме матричных игр решение в нечетких смешанных стратегиях существует всегда и $\alpha = \gamma = \nu$. Здесь ν - нечетная цена игры.

Для уточнения x_1^0 и x_2^0, y_1^0 и y_2^0 нужно найти нечетких точку пересечения нечетких прямых, что, в свою очередь, сводится к решению нечетной системы:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = \nu, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = \nu. \end{cases} \tag{2}$$

Решая систему уравнений (2) и подставляя $x_2 = 1 - x_1$, получим

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{\Delta},\ x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{\Delta}. \tag{3}$$

Аналогично находим

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{\Delta},\ y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{\Delta}. \tag{4}$$

Нечетная цена игры ν находится подстановкой найденных значений x_1, x_2 в любые из уравнений системы (2):

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{\Delta}. \tag{5}$$

В формулах (3) – (5) $\Delta = a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}$.

Так как в данной работе элементами платежной матрицы являются гауссовы нечеткие числа, то для нахождения нечетких оптимальных стратегий и нечеткой цены игры по формулам (3) – (5) требуется определить основные операции над этими числами. В работе [3] представлены правила выполнения операций над гауссовыми нечеткими числами (правила суммирования и вычитания, правила умножения и деления). Сформулируем эти правила.

1. При суммировании двух нечетких чисел A_x и A_y с функциями принадлежности соответственно равными:

$$\mu_A(x) = exp\left\{ -\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right\}, \tag{6}$$

$$\mu_A(y) = exp\left\{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right\},$$

получим число B с функцией принадлежности:

$$\mu_B(z) = exp\left\{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right\},$$
$$m_z = m_x + m_y, \sigma_z^2 = \sigma_x^2 = \sigma_y^2. \qquad (7)$$

2. Разность двух гауссовых нечетных чисел с функциями принадлежности (6) равны числу В с функцией принадлежности:

$$\mu_B(z) = exp\left\{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right\},$$
$$m_z = m_x - m_y, \sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2. \qquad (8)$$

3. При умножении двух нечетных чисел A_x и A_y с функциями принадлежности (6) получим число В с функцией принадлежности:

$$\mu_B(z) = \exp\left\{-\frac{(z-m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right\},$$
$$m_z = m_x \cdot m_y, \sigma_z^2 = \sigma_x^2 \cdot \sigma_e^2. \qquad (9)$$

4. При делении нечетного числа A_x на нечетное число A_y с функциями принадлежности (6) получим число B с функцией принадлежности:

$$\mu_B(z) = exp\left\{-\frac{(z-\frac{m_x}{m_y})^2}{2\frac{\sigma_x^2 m_y^2 + \sigma_y^2 m_x^2}{m_y^2}}\right\}. \qquad (10)$$

Выводы. В данной работе предлагается рассмотрение графоаналитического метода решения матричных игр, в которых элементы матричной матрицы – гауссовы нечетные числа. Вначале рассмотрен случай, когда задана игра размерностью $2\times n$. Случай, когда задана игра размеренностью $m\times 2$ рассматривается аналогично. Представлены правила выполнения основных алгебраических операций над гауссовыми нечеткими числами.

Литература

1. Василевич Л.Ф. Теория игр. Уч. Пособие / Л.Ф.Василевич. – К.: КННМ, 2000.– 98с.
2. Зайченко Ю.П. Исследование операции: нечеткая оптимизация /

Ю.П. Зайченко. – К.: Вища школа, 1991. – 191 с.
3. Раскин Л.Г. Нечеткая математика. Основы теории. Тригонометрия. / Л.Г.Раскин, О.В.Серая. – Х.: Парус, 2008. – 352 с.
4. Новак В. Математические принципы нечеткой логики / В.Новак, И.Перфильева, И.Мочкорж. – Пер. с англ. под ред. Аверкина А.Н. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 352с.
5. Баришевський С.О. Аксіоматичні основи евклідової нечіткої планіметрії / С.О. Баришевський, Л.Є.Никифорова, О.Г. Караєв // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон: ХНТУ, 2014. – Вип. 3(50). – С. 559-561.
6. Зайченко Ю.П. Игровые модели принятия решений в условиях неопределенности / Ю.П.Зайченко // Труды V международной школы-семинар «Теория принятия решений». – Ужгород: УжНУ, 2010. – 274 с.
7. Барышевський С.О. Математичні методи й моделі розв'язання задач інституціональної економіки в умовах невизначеності. // Матеріали п'ятої науково-практичної конференції «Розвиток наукових досліджень 2009». – Полтава: вид-во «ІнтерГрафіка», 2009. – Т 12. – с. 56-58.
8. Серая О.В. Задача теории игр нечеткой платежной матрицей / О.В.Серая, Т.И.Каткова // Математичні машини і системи. – 2012. – №2. – С. 29-36.

ГРАФОАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РІШЕННЯ НЕЧІТКИХ МАТРИЧНИХ ІГОР

Баришевський С.О.

Розглянуто графоаналітичний метод розв'язання матричних ігор, в яких елементи платіжної матриці - нечіткі числа з невідомими функції приналежності.

Ключові слова - платіжна матриця, нечіткі числа, функція приналежності, нечітка пряма, нечітка геометрія.

GRAFOANALITICHESKY METHOD FOR SOLVING FUZZY MATRIX GAMES

S. Baryshevskij

Graphic-analytical method for solving matrix games in which the payoff matrix elements - fuzzy number with unknown membership function considered in the article.

Keywords - payment matrix, fuzzy numbers, membership function, fuzzy straight, fuzzy geometry.