

УДК 531/534:57 + 612.7

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СХЕМИ ПРОТЕЗУ СТОПИ

Куценко Л.М., д.т.н.,

Семків О.М., к.т.н.

Національний університет цивільного захисту України (м. Харків)

Запропонована схема конструкції протеза стопи з пружинами та метод обчислення значень їх коефіцієнтів жорсткості залежно від кутів та довжин елементів конструкції, а також величин мас, зосереджених в вузлах конструкції.

Ключеві слова: протез стопи з пружинами, лагранжіан, рівняння Лагранжа другого роду, програма Maple, чисельний метод Рунге-Кутти.

Постановка проблеми. Для створення антропометричних протезів кінцівок необхідні наукові розрахунки, у тому числі і геометричне моделювання у часі дії протезних виробів. У даній роботі розглянуто схему геометричної моделі протезу стопи. Існує значна кількість розробок таких протезів [1-5], які відрізняються механічними схемами та видами електротехніки. Найбільш зручними виявляються протези у вигляді механічних конструкцій, де можливо врахувати індивідуальні антропологічні дані користувача.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Найбільш поширеними є механічні протези стопи з убудованим титановим адаптером, пружні властивості якого забезпечуються S-подібним елементом. Для посилення ефекту в форму «черевика» вводять спеціальний спінений матеріал. Для користувача налаштування такого протезу зводиться [1] до підбору S-подібних титанових елементів (вартість яких для пересічного користувача є високою).

Більш технологічними будуть протези стопи з пружинами. Для індивідуального налаштування антропометричних параметрів цього різновиду протезів необхідно мати комплект пружин. У роботах [2,3] без розрахунків наведено ідею схеми протеза стопи з пружинними елементами (рис. 1). У роботах [4,5] розглянуто складніші схеми механічних протезів

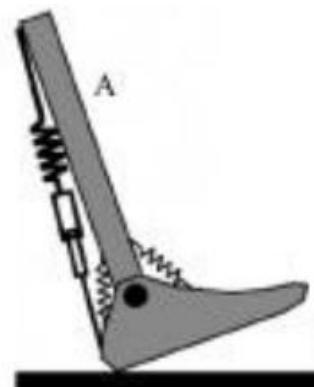


Рис. 1. Схема протеза з пружинами [2,3]

стопи з пружинами. Наводяться розрахунки пропорцій елементів конструкції протеза з урахуванням сталих коефіцієнтів жорсткості пружин. З результатів робіт [1-5] слідує, що для реалізації антропометричних параметрів механічних протезів необхідно вміти розраховувати коефіцієнти жорсткості взаємопов'язаних пружин залежно від параметрів схеми конструкції. Це є невирішеним питанням розрахунку механічної моделі протеза стопи з пружинними елементами.

Формулювання цілей статті. Розробити схему конструкції протеза стопи з пружинами та метод обчислення значень їх коефіцієнтів жорсткості залежно від кутів та довжин елементів конструкції, а також величин мас, зосереджених в вузлах конструкції.

Основна частина. На рис. 2,а наведено запропоновану схему протеза стопи з пружинними елементами. Тут прийнято позначення: B_1D_1 , OD_1 , OE_1 – пружини з коефіцієнтами жорсткості, відповідно, k_1 , k_2 і k_3 . Довжини лінійних елементів: $OA_1 = d_1$; $OB_1 = d_1/2$; $OC_1 = d_1/4$; $C_1D_1 = d_2$; $C_1E_1 = d_3$. Два кутові параметри u і v вважаються узагальненими координатами. У точці C_1 зосереджена маса m_1 , а в точці A_1 – маса m_2 .

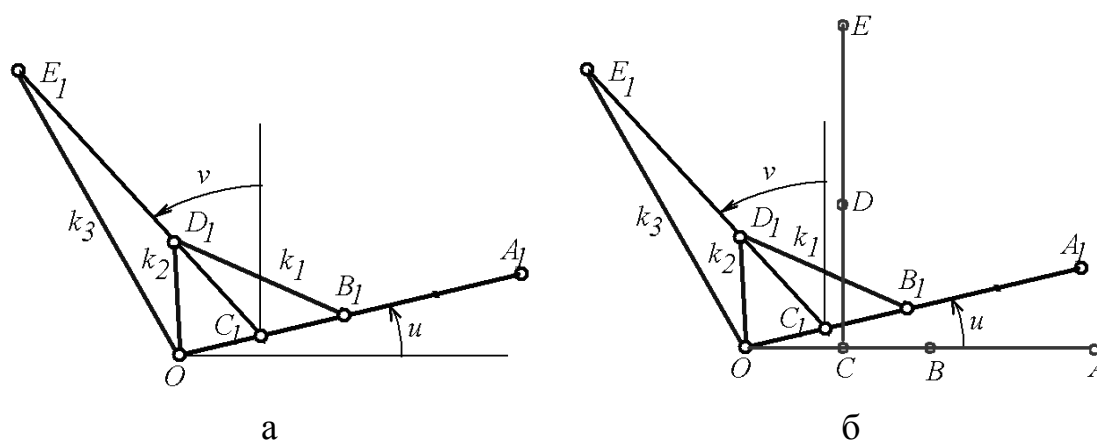


Рис. 2. Схема протеза стопи з пружинними елементами

Для визначення динаміки руху протеза стопи необхідно визначити кінетичну і потенціальну енергію системи.

Формула для опису кінетичної енергії має вигляд:

$$K = \frac{m_1}{2} \cdot 0.5 \cdot OA^2 \dot{u}^2 + \frac{m_1}{6} \cdot OA^2 \dot{u}^2 + \frac{m_2}{2} \cdot 0.5 \cdot CE^2 \dot{v}^2 + \frac{m_2}{6} \cdot CE^2 \dot{v}^2. \quad (1)$$

Для опису потенціальної енергії використаємо рис.2, б, на якому, порівняно з рис.2, а, виконано доповнення до «сталого» положення системи. Завдяки цьому не складно розрахувати вплив коефіцієнтів жорсткості пружин на деформування системи в цілому з урахуванням кутів u і v як узагальнених параметрів.

Формула для опису потенціальної енергії має вигляд:

$$P = P_1 + P_2 + P_{12}, \quad (2)$$

де $P_1 = -0.5m_1g \cdot OA \cdot \sin u$; $P_2 = -0.5m_2g \cdot OAsin u + OE \sin v$;

$$P_{12} = \frac{k_1 DB_1 - DB^2}{2} + \frac{k_2 OD_1 - OD^2}{2} + \frac{k_3 OE_1 - OE^2}{2}.$$

Тут

$$DB = \sqrt{OC - OB \cos u + CD^2}; \quad OD = \sqrt{OC^2 + CD^2}; \quad OE = \sqrt{OC^2 + CE^2};$$

$$DB_1 = \sqrt{OC \cos u - CD \sin v - OB \cos u^2 + OC \sin u + CD \cos v - OB \sin u^2};$$

$$OD_1 = \sqrt{OC \cos u - CD \sin v + OC \sin u + CD \cos v};$$

$$OE_1 = \sqrt{OC \cos u - CE \sin v^2 + OC \sin u + CE \cos v^2}.$$

За допомогою лагранжіану $L=K-P$ [8] для визначення в наперед заданий момент часу взаємного положення елементів схеми протеза було складено систему рівнянь Лагранжа другого роду. Розв'язання системи здійснено чисельним методом Рунге-Кутти з початковими умовами $u(0)=u_0$, $u'(0)=Du_0$, $v(0)=v_0$, $v'(0)=Dv_0$.

Наведемо розрахунок коефіцієнта жорсткості k_3 пружини OE_1 (взаємопов'язаного з k_1 і k_2) залежно від інших сталих параметрів схеми протезу. Вважатимемо, що завдяки вибору знайденого значення k_3 рух елементів схеми протеза має відбуватися не хаотично.

Оберемо початкові значення узагальнених координат $u_0=-\pi/12$; $Du_0 = 0$; $v_0 = \pi/2 + \pi/20$; $Dv_0 = 0$, а також величини параметрів (усі в умовних одиницях): $d1 = 0.35$ – довжина відрізка OA_1 ; $d2 = 0.30$ – довжина відрізка C_1D_1 ; $d3 = 0.75$ – довжина відрізка C_1E_1 ; $m1 = 70$ – маса в точці C_1 ; $m2 = 0.4$ – маса в точці A_1 ; $k1 = 50$ – коефіцієнт жорсткості пружини B_1D_1 ; $k2 = 50$ – коефіцієнт жорсткості пружини OD_1 .

Наближено розв'язуємо систему рівнянь Лагранжа другого роду з обраними початковими значеннями узагальнених координат і будуємо у фазовому просторі $\{v, Dv, t\}$ одержану множину точок, належних інтегральній кривій. Після сполучення послідовних точок відрізками одержимо наближене зображення інтегральної кривої. Це зображення залежатиме від певного значення «керуючого» параметра (у нашому випадку k_3). При випадкових значеннях k_3 у фазовому просторі $\{v, Dv, t\}$ утвориться «плутана» інтегральна крива, її проекція на фазову площину $\{v, Dv\}$ буде також «плутана» фазова траєкторія (рис. 3,а).

У разі зміни значень k_3 має змінюватися і характер фазової траєкторії. При певному (критичному) значенні k_3 характер фазової траєкторії зміниться на якісному рівні – вона перетвориться у

«закономірну» криву (рис. 3,б). У динаміці спостерігатиметься ніби оптичний ефект «наведення на різкість» плутанини фазових траєкторій на площині $\{v, Dv\}$. Завдяки цій аналогії [6,7] знаходження критичних значень параметрів названо *проекційним фокусуванням*.

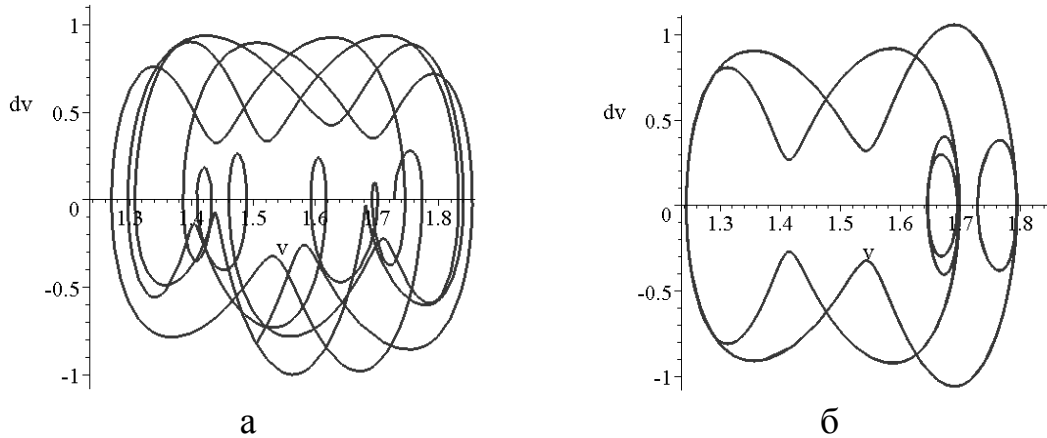


Рис. 3. Фазові траєкторії на площині $\{v, Dv\}$ при $k_1=50, k_2= 50$: а) для одного з довільних значень k_3 ; б) для значення $k_3=110,2$

У розглянутому прикладі при $k_1=50, k_2= 50$ критичне значення коефіцієнта жорсткості пружини OE_1 буде $k_3 = 110,2$. Для порівняння на рис. 4, а наведені фазові траєкторії при $k_1=100; k_2= 100$ для значення $k_3=157,2$. На рис. 4, б зображено теж саме при $k_1=150; k_2=150$ для значення $k_3=165,6$.

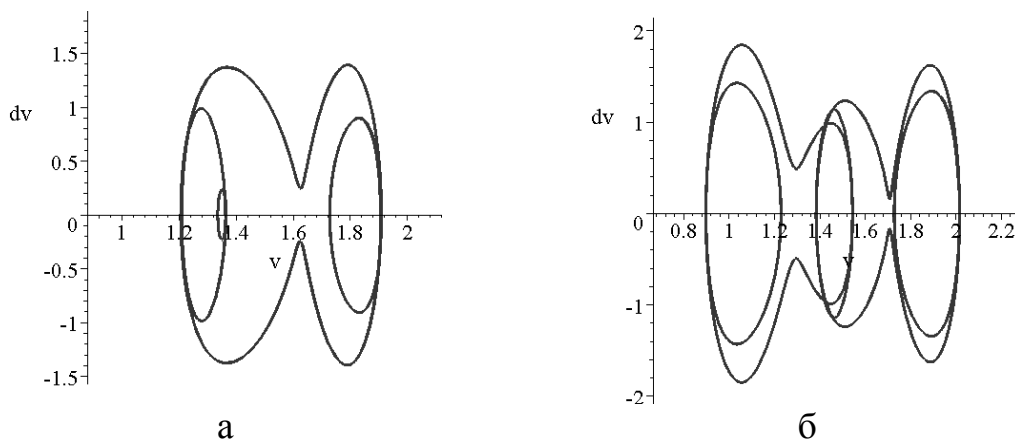


Рис. 4 - Фазові траєкторії на площині $\{v, Dv\}$: а) при $k_1=100; k_2= 100; k_3=157,2$; б) при $k_1=150; k_2= 150; k_3=165,6$

Комп'ютерні експерименти показали, що для $k_1=200$ і $k_2= 200$ не можливо запобігти хаотичності руху елементів схеми протеза шляхом вибору значення параметра k_3 . Крім того, з трьох розглянутих вище варіантів перевагу слід віддати варіанту з параметрами $k_1=100; k_2= 100$ і $k_3=157,2$ (рис. 4,а). Це пояснюється мінімальною площею

фазової траєкторії, оціненою за кількістю пікселів, що її складають. На рис. 5 зображено кілька анімаційних кадрів руху моделі стопи в певні моменти часу t для значень коефіцієнтів жорсткості $k_1=100$; $k_2=100$ і $k_3=157,2$. За допомогою анімаційного фільму можна наочно переконатися у тому, що урахування значення $k_3=157,2$ у процесі обчислення кутів $u(t)$ і $v(t)$ при розв'язанні системи рівнянь Лагранжа другого роду дозволяє одержати нехаотичні рухи елементів схеми.

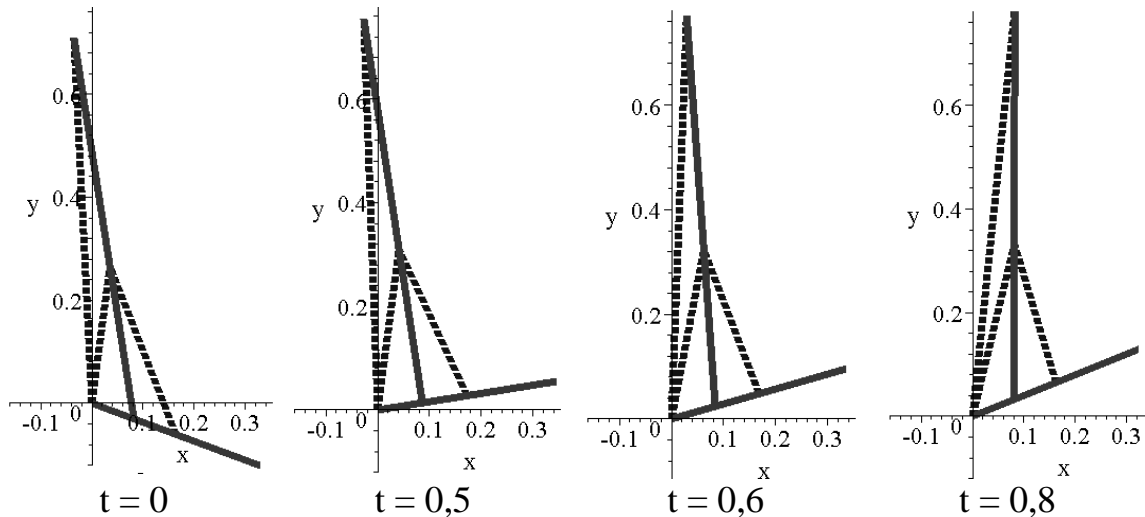


Рис. 5. Кадри руху моделі стопи в моменти часу t для коефіцієнтів жорсткості $k_1=100$; $k_2=100$ і $k_3=157,2$

Інтегральні криві у фазовому просторі $\{u, Du, t\}$ матимуть вигляд «намотки» на циліндричну поверхню з твірною, паралельною осі Ot . Тому фазові траєкторії на площині $\{u, Du\}$ будуть нерухомими при довільному значенні керуючого параметра і тут не розглянуті.

Висновки. Наведена схема дозволяє розрахувати механічну модель стопи з пружинними елементами шляхом визначення взаємоприйнятних значень коефіцієнтів жорсткостей пружин залежно від кутів та довжин елементів конструкції, а також величин мас, зосереджених в її вузлах. Подальші дослідження будуть пов'язані з встановленням допустимих меж зміни параметрів.

Література

1. Биомеханика стопы человека: материалы I Международной науч.-практ. конференции. – Гродно: ГрГУ, 2008. – 172 с.
2. Патент US8597369. Equilibrium-point prosthetic and orthotic ankle-foot systems and devices / Hansen A, Steven A. Gard, Dudley S. опубл. 03.12.2013.
3. Hansen A. Conceptual design of an ankle-foot prosthesis that automatically adapts to ramped walking surfaces [Електронний

- ресурс] / A. Hansen, S. Gard, D.Childress// Режим доступа: <http://www.oandp.org/publications/jop/2008/2008-37.pdf>.
4. Cherelle P. The AMP-Foot 2.0: Mimicking Intact Ankle Behavior with a Powered Transtibial Prosthesis [Электронный ресурс] / P. Cherelle, A. Matthys, V. Grosu // Режим доступа: <http://mech.vub.ac.be/multibody/topics/ProstheticDevices/AMP-Foot2.0/BioRob12.pdf>.
 5. Zeng Y. Design and testing of a passive prosthetic ankle with mechanical performance similar to that of a natural ankle / Y. Zeng // A Thesis Submitted to the Faculty of the Graduate School. – Milwaukee, Wisconsin: Marquette University, 2013. – 96 p.
 6. Семків О.М. Метод визначання особливих траєкторій коливань вантажу 2d-пружинного маятника / О.М. Семків // Вісник ХНАДУ/ХНАДУ. – Харків, 2015. – № 71. – С. 36-44.
 7. Semkiv O.M. Computer graphics of the oscillation trajectories of 2d spring pendulum weight/ O.M. Semkiv// European Applied Sciences: challenges and solutions. – ORT Publishing: Stuttgart, 2015. –С.63–70.
 8. Xiao O. Dynamics of the Elastic Pendulum. [Электронный ресурс] / O. Xiao, S. Xia // Режим доступа: http://math.arizona.edu/~gabitov/teaching/141/math_485/Midterm_Presentations/Elastic_Pedulom.pdf.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СХЕМЫ ПРОТЕЗА СТОПЫ

Куценко Л.Н., Семкив О.М.

Предложена схема конструкции протеза стопы с пружинами и метод вычисления значений их коэффициентов жесткости в зависимости от углов и длин элементов конструкции, а также величин масс, сосредоточенных в узлах конструкции.

Ключевые слова: протез стопы с пружинами, лагранжиан, уравнение Лагранжа второго рода, программа Maple, численный метод Рунге-Кутты.

GEOMETRIC MODELING CIRCUITS PROSTHETIC FOOT

L. Kutsenko, O. Semkiv

A prosthetic foot design scheme with springs and the method of calculating the values of the stiffness coefficients depending on the angles and lengths of the design elements, as well as the values of the masses are concentrated in construction sites.

Key words: prosthetic foot with springs, Lagrangian, Lagrange equation of the second kind, Maple program, numerical method of Runge-Kutta.