УДК 514.18

АВТОМАТИЗАЦІЯ ПЕРЕХОДУ ВІД ПРЯМОКУТНИХ ДО ІЗОМЕТРИЧНИХ СІТОК НА ПОВЕРХНЯХ ОБЕРТАННЯ

Пилипака С.Ф., д.т.н.,
Кремець Т.С.,
Несвідоміна О.В., аспірант *
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ)

Розроблено комп'ютерну модель автоматизованого перезадання поверхонь обертання ізометричними координатними лініями в середовищі символьної алгебри Maple.

Ключові слова: поверхні обертання, коефіцієнти першої квадратичної форми, ізометричні координатні лінії.

Постановка проблеми. Основною властивістю ізометричних (теж саме, що ізотермічних) поверхонь є те, що елементарні комірки їх координатних ліній мають форму квадратів. Формоутворення та дослідження ізометричних поверхонь обумовлює проведення досить складних диференціальних та інтегральних обчислень. Тому актуальною проблемою є розробка відповідного комп'ютерного інструментарію, який би дозволив зняти трудомісткі аналітичні викладки з метою розширення переліку ізометричних поверхонь.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Використання ізометричних сіток було показано при відображенні плоских написів на криволінійні форми [2] із збереженням їх конформності (кутів між лініями).

Формулювання цілей статті. Розробити комп'ютерну модель в середовищі символьної алгебри Maple [1] побудови на поверхнях обертання ізометричних координатних ліній.

Основна частина. Параметричне рівняння поверхні обертання:

$$\boldsymbol{R}(u,v) = \boldsymbol{R}[\varphi(v)\ \cos(u)\ ,\ \varphi(v)\ \sin(u)\ ,\psi(v)], \qquad (1)$$

де: $\varphi(v)\ ,\psi(v)$ - параметричні рівняння плоскої кривої (меридіана);
$u \in [0; 2\pi)\ , v \in R$ – незалежні параметри.

Перша квадратична форма поверхні обертання (1) має вигляд:

$$ds^2 = \varphi(v)^2\, du^2 + \left(\left(\frac{d}{dv}\varphi(v)\right)^2 + \left(\frac{d}{dv}\psi(v)\right)^2\right) dv^2, \qquad (2)$$

---

* Науковий керівник – д.т.н., проф. Пилипака С.Ф.

або ж:

$$ds^2 = \varphi(v)^2 \left(du^2 + \frac{\left(\frac{d}{dv}\varphi(v)\right)^2 + \left(\frac{d}{dv}\psi(v)\right)^2}{\varphi(v)^2} dv^2 \right). \qquad (3)$$

Для того, щоб поверхня обертання була ізометричною, необхідно перейти до першої квадратичної форми у наступному вигляді:

$$ds^2 = g(v)\left(du^2 + dw^2\right). \qquad (4)$$

Для цього необхідно виконати наступні перетворення. Введемо:

$$dw^2 = \frac{\left(\frac{d}{dv}\varphi(v)\right)^2 + \left(\frac{d}{dv}\psi(v)\right)^2}{\varphi(v)^2} dv^2, \qquad (5)$$

звідки:

$$w = \int \sqrt{\frac{\left(\frac{d}{dv}\varphi(v)\right)^2 + \left(\frac{d}{dv}\psi(v)\right)^2}{\varphi(v)}}\, dv. \qquad (6)$$

Одержаний вираз (6) не завжди можна проінтегрувати, а саме отримати рівняння $w = w(v)$. Якщо ж це вдається, то виразити змінну v із рівняння $w = w(v)$ теж не завжди можливо. Було створено комп'ютерну модель лінійного алгоритму аналітичних перетворень (рис.1) для різних поверхонь обертання (1) з відповідними параметрично заданими твірними $[\varphi(v), \psi(v)]$.

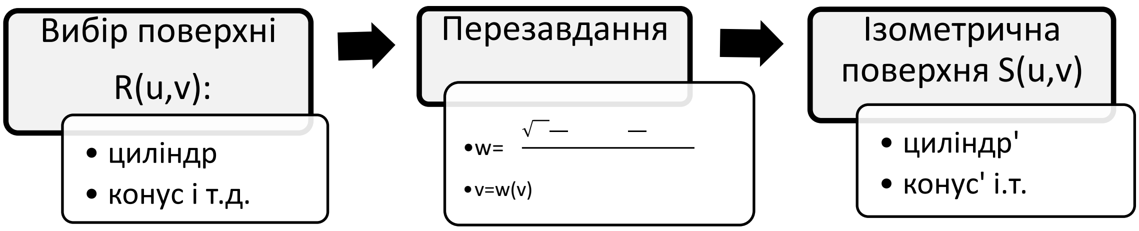


Рис.1. Послідовність переходу до ізометричної поверхні обертання

Результати обчислювальних експериментів згруповано в табл.1, в якій наведено назву поверхні $\boldsymbol{R}(u,v)$, параметричні рівняння твірної $[\varphi(v), \psi(v)]$ поверхні, її першу квадратичну форму, параметричне рівняння ізометричної поверхні, її першу квадратичну форму, зображення поверхонь $\boldsymbol{R}(u,v)$ і $\boldsymbol{S}(u,v)$.

При побудові зображень поверхонь необхідно задавати як параметри форми, так і параметри координатних ліній: u_o, u_n, v_o, v_n – початкове та кінцеве значення відповідно u та v −координатних ліній; n_u, n_v – кількість квадратних комірок вздовж u, v – координатних ліній сітки. При цьому необхідно дотримуватися умови, щоб величина приросту обох параметрів u і v була однаковою $ud = vd$. Для конкретних значень $u_o,\ u_n, n_u$ величина приросту параметра u є:

$$ud = \frac{u_n - u_o}{n_u}, \tag{8}$$

звідки значення параметра v визначається із виразу:

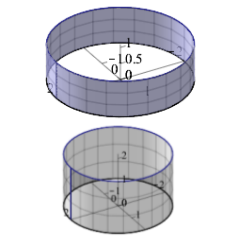
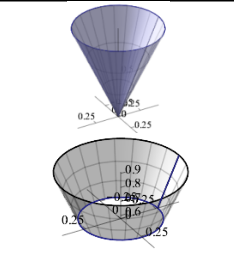
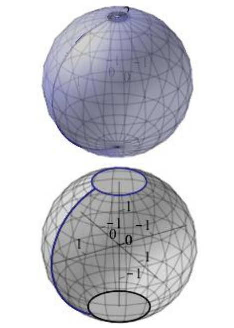
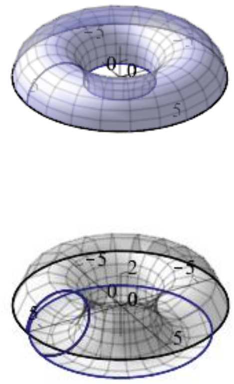
$$v = v_o + vd \cdot j, \tag{9}$$

де $j = 0..n_v$ – порядковий номер квадратної комірки вздовж v- координатної лінії ізометричної сітки.

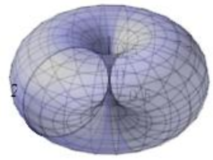
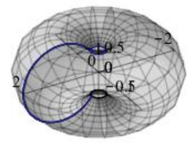
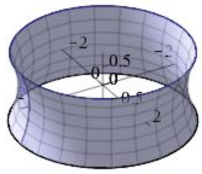
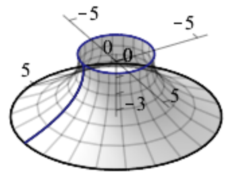
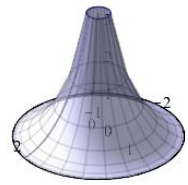
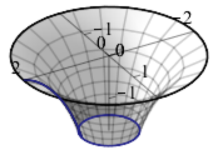
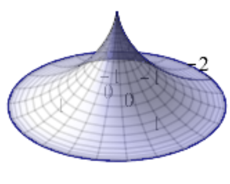
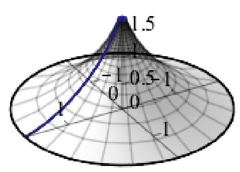
Параметри форми поверхонь, наведених в таблиці 1, приймалися $a = 2$ і $b = 4$.

Таблиця 1

Рівняння та зображення ізометричних поверхонь обертання

Циліндр	$\varphi\ v\ = a,\ \psi\ v\ = v$, де a - радіус $\boldsymbol{R}\ a\cos\ u\ , a\sin\ u\ , v$ $ds^2 =\ a^2\, du^2\ + dv^2$ $\Downarrow$ $\boldsymbol{S}\ a\cos\ u\ , a\sin\ u\ , a\, v$ $ds^2 =\ a^2\ \ du^2\ + dv^2$	
Конус	$\varphi\ v\ = cos(a)\, v,\ \psi\ v\ = sin(a)\, v$, де a – кут нахилу $\boldsymbol{R}\ cos(a)\, v\cos\ u\ , cos(a)\, v\sin\ u\ , sin\ a\ v$ $ds^2 =\ cos(a)^2\, v^2\, du^2\ + dv^2$ $\Downarrow$ $\boldsymbol{S}\ cos(a)\, e^{cos(a)} cos\ u\ , cos(a)\, e^{cos(a)}\ sin\ u\ , sin(a)\, e^{cos\ a\ v}$ $ds^2 = cos\ a\ ^2\, e^{2\, cos\ a\ v}\ \ du^2\ + dv^2$	
Сфера	$\varphi\ v\ = a\ cos\ v\ ,\ \psi\ v\ = a\ sin\ v$, де a - радіус $\boldsymbol{R}\ a\ cos\ v\ \ cos\ u\ , a\ cos\ v\ \ sin\ u\ , a\ sin\ v$ $ds^2 =\ a^2\, v^2\, du^2\ +\ \ a^2 + a^2\ \ dv^2$ $\Downarrow$ $\boldsymbol{S}\ \frac{2a\, e^v}{e^{2v}+1}\ cos\ u\ , \frac{2a\, e^v}{e^{2v}+1}\ sin\ u\ , \frac{a\ \ e^{2v}-2}{e^{2v}+1\ ^2}$ $ds^2 = \frac{4a^2 e^{2v}}{e^{2v}+1\ ^2}\ \ du^2\ + dv^2$	
Тор $b{>}a$	$\varphi\ v\ = b + a\cos\ v\ ,\ \psi\ v\ = a\, sin(v)$ $\boldsymbol{R}\ \ b + a\cos\ v\ \ \ cos\ u\ ,\ b + a\cos\ v\ \ \ sin\ u\ , a\sin\ v$ $ds^2 =\ \ a\, co\, s\ v\ + b\ ^2\, du^2\ + a^2\, dv^2$ $\Downarrow$ $\boldsymbol{S}$ $(b + a\, cos(2atan(\frac{tanh\ \frac{v\ \ \overline{a^2-b^2}}{2a}}{\overline{a^2-b^2}})))\ cos\ u\ ,$ $(b + a\, cos(2atan(\frac{tanh\ \frac{v\ \ \overline{a^2-b^2}}{2a}}{\overline{a^2-b^2}})))\ sin\ u\ ,$ $a\, sin(2atan(\frac{tanh\ \frac{v\ \ \overline{a^2-b^2}}{2a}}{\overline{a^2-b^2}})))$	

Таблиця 1 (продовження)

Тор $a=b=1$	$\varphi(v)=1+\cos(v),\ \psi(v)=\sin(v)$ $\boldsymbol{R}((1+\cos(v))\cos(u),\ (1+\cos(v))\sin(u),\ \sin(v))$ $ds^2=(\cos(v)+1)^2\,du^2+dv^2$ $\Downarrow$ $\boldsymbol{S}((1+\cos(2\,\mathrm{atan}(v)))\cos(u),\ (1+\cos(2\,\mathrm{atan}(v)))\sin(u),\ \sin(2\,\mathrm{atan}(v)))$ $ds^2=\frac{1}{(v^2+1)^2}(du^2+dv^2)$	 
Катеноїд	$\varphi(v)=\sqrt{a^2+v^2},\ \psi(v)=a\arcsin\left(\frac{v}{a}\right)$ $\boldsymbol{R}\left(\sqrt{a^2+v^2}\cos(u),\ \sqrt{a^2+v^2}\sin(u),\ a\arcsin\left(\frac{v}{a}\right)\right)$ $ds^2=(a^2+v^2)(du^2+dv^2)$ $\Downarrow$ $\boldsymbol{S}\left(\frac{2a\,e^v\cos(u)}{e^{2v}+1},\frac{2a\,e^v\sin(u)}{e^{2v}+1},\frac{a(e^{2v}-2)}{(e^{2v}+1)^2}\right)$ $ds^2=\frac{a^4e^{-2v}+2a^2+e^{2v}}{4}(du^2+dv^2)$	 
Псевдосфера	$\varphi(v)=a\sin(v),\ \psi(v)=a\left(\cos(v)+\ln\left(\tan\left(\frac{v}{2}\right)\right)\right)$ $\boldsymbol{R}\left(a\sin(v)\cos(u),\ a\sin(v)\sin(u),\ a\left(\cos(v)+\ln\left(\tan\left(\frac{v}{2}\right)\right)\right)\right)$ $ds^2=\frac{a^2\left((\cos(v)^2-1)^2du^2+\cos(v)^2dv^2\right)}{\sin(v)^2}$ $\Downarrow$ $\boldsymbol{S}\left[\frac{a\cos(v)}{v},\frac{a\sin(v)}{v},\frac{a\left(\ln\left(\tan\left(\frac{1}{\sqrt{v^2-1}}\right)\right)v+\sqrt{v^2-1}\right)}{v}\right]$	 
Астроїда	$\varphi(v)=a\cos\left(\frac{v}{4}\right)^3,\ \psi(v)=a\sin\left(\frac{v}{4}\right)^3$ $\boldsymbol{R}\left(a\cos\left(\frac{v}{4}\right)^3\cos(u),\ a\cos\left(\frac{v}{4}\right)^3\sin(u),\ a\sin\left(\frac{v}{4}\right)^3\right)$ $ds^2=\frac{a^2\cos\left(\frac{v}{4}\right)^2\left(16\cos\left(\frac{v}{4}\right)^4du^2-9\left(\cos\left(\frac{v}{4}\right)^4-1\right)dv^2\right)}{16}$ $\Downarrow$ $\boldsymbol{S}\left(\frac{27a\cos(u)}{(v-3)^3},\frac{27a\sin(u)}{(v-3)^3},\frac{729a\cos(u)}{(v-3)^3}\right)$ $ds^2=\frac{729a^2}{(v-3)^6}(du^2+dv^2)$	 

Деякі рівняння із табл.1 наведено в праці [2]. Їх порівняння показує, що системи комп'ютерної алгебри, зокрема Maple [1], не завжди можуть автоматично звести аналітичні перетворення до найбільш простого вигляду. Зокрема, рівняння тора із ізометричними координатними лініями з параметрами форми $a=b=1$ має вигляд:

$$S\ u,v\ = S\ \frac{1}{v^2+1} cos\ u\ , \frac{1}{v^2+1}\ sin\ u\ , -\frac{v}{v^2+1}\ , \qquad (9)$$

яке відрізняється від наведеного в табл.1, оскільки система Maple не змогла спростити вираз $1 + cos\ 2\,atan\ v$ до більш простішого.

Висновки. Розроблене програмне забезпечення в середовищі символьної алгебри Maple дозволяє автоматизувати складні аналітичні перетворення для формування та аналізу ізометричних поверхонь обертання. Для деяких поверхонь автоматично завершені аналітичні перетворення не будуть найпростішими, що потребує додаткового спрощення. Для одних і тих же значень незалежних u та v параметрів координатних ліній, їх вигляд для деяких поверхонь обертання відрізняються, наприклад, на конусі, катеноїді, псевдосфері.

Література

1. Аладьев В.З. Программирование и разработка приложений в Maple / В.З.Аладьев, В.К.Бойко, Е.А.Ровба. – Гродно–Таллин, 2007. – 458 с.
2. Кремець Т.С. Конструювання поверхонь обертання, віднесених до ізометричних сіток координатних ліній / Т.С. Кремець, В.М. Несвідомін // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.:КНУБА, 2012. – Вип. 89. – С.271-276.

АВТОМАТИЗАЦИЯ ПЕРЕХОДА ОТ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ К ИЗОМЕТРИЧЕСКИМ СЕТКАМ НА ПОВЕРХНОСТЯХ ВРАЩЕНИЯ

Пилипака С.Ф., Кремець Т.С., Несвидомина А.В.

Разработана компьютерная программа в среде символьной алгебры Maple автоматизированного перезадания поверхностей вращения изометрическими координатными линиями.

Ключевые слова: поверхности вращения, коэффициенты первой квадратичной формы, изометрические координатные линии.

AUTOMATION OF THE TRANSITION FROM RECTANGULAR TO ISOMETRIC MESH ON SURFACES OF REVOLUTION

S. Pylypaka, T. Kremez, A. Nesvidomina

A computer code is developed in the symbolic algebra environment Maple automated definition surfaces of revolve to isometric mesh.

Key words: surfaces of revolve, the coefficients of the first quadratic forms, isometric coordinate lines.