

УДК 532.59:534.1

МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАННЯ МАЯТНИКА ПІД ВІЗКОМ НА ПРИКЛАДІ МЕХАНІЧНОЇ МОДЕЛІ РІДИНИ У ЄМНОСТІ

Семків О.М., к.т.н.

Національний університет цивільного захисту України (м. Харків),

Семенова-Куліш В.В., к.т.н.

Український державний університет залізничного транспорту

(м. Харків)

Розглянуто метод визначення нехаотичного сліду коливань маятника під візком, поєднаного з пружиною, що має наближати форму профілю хвилі рідини, яка виникла в результаті поздовжніх коливань ємності.

Ключові слова: профіль хвилі рідини, маятник під візком, хвилі Фарадея, механічний аналог коливання рідини.

Постановка проблеми. Дослідження коливання рідини в рухомій ємності мають велике значення для розв'язання багатьох задач [1–3]. Одним із прикладів є задача про горизонтальні переміщення рідини в ємності з виникненням хвиль Фарадея [1]. При цьому для вивчення поздовжніх коливань використовується їх механічний аналог – маятник під візком (рис. 1, запозичений з [1]).

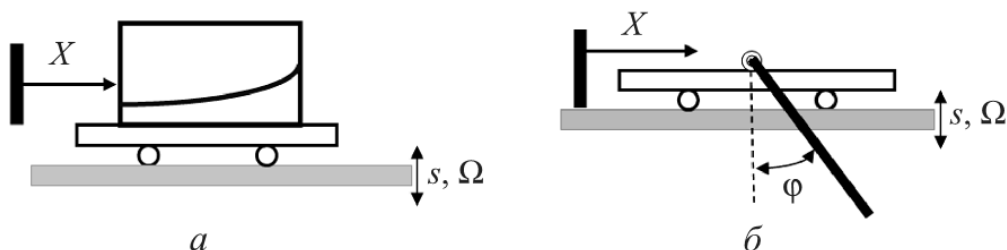


Рис. 1. Експеримент із хвилями Фарадея в рухомій ємності (а); і їхній механічний аналог – маятник під візком (б)

Використання «маяткової» аналогії для дослідження гідродинамічних ефектів коливання рідини у ємності дозволяє спростити хід розрахунків і унаочнити результати обчислень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У статті [2] розглянуто динаміку тиску автоцистерни на проїзну частину під час гальмування з урахуванням рухомої рідини, що є актуальним, наприклад, для експлуатації пожежних машин. У роботі [3] досліджено динамічну модель автоцистерни з урахуванням розподілу ємності на відсіки. При цьому використано аналогію між рухом маятника під візком і зв'язаними коливаннями рідини у ємності у разі

параметричного збурення стоячих хвиль. Крім того, розглянуто резонансні коливання маятника біля нижнього положення рівноваги під дією вертикальних коливань точки підвісу.

Ці суто аналітичні дослідження доцільно доповнити графічними уяочненнями результатів коливань маятника під візком.

Формулювання цілей статті. Розробити спосіб визначення нехаотичного сліду коливань маятника під візком, поєднаного з пружиною, що має наближати форму профілю хвилі рідини, яка виникла внаслідок поздовжніх коливань ємності.

Основна частина. Вважатимемо, що гідродинамічні параметри хвиль рідини у рухомій ємності можна пов'язати з такими параметрами маятника під візком, поєднаного з пружиною: m_1 – маса візка; m_2 – маса маятника; k – коефіцієнт жорсткості пружини. d – довжина маятника (рис. 2).

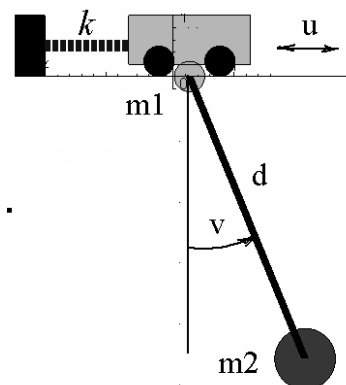


Рис. 2. Схема маятника під візком

З геометричної точки зору для розв'язання поставленої задачі необхідно визначити таку комбінацію зазначених параметрів, щоб забезпечити утворення нехаотичного сліду руху маятника (також необхідно виключити і нехаотичні сліди з «вузлами»). Тоді знайдену форму сліду вважатимемо наближеним профілем хвилі рідини, яка виникла в результаті поздовжніх коливань ємності (рис. 1, а).

Динаміку коливання маятника під візком будемо описувати системою диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\begin{aligned}
 m_1 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + m_2 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + \frac{1}{2} m_2 d \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) \cos(v(t)) \\
 - \frac{1}{2} m_2 d \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \sin(v(t)) + k u(t) = 0 \\
 \frac{1}{6} m_2 d \left(3 \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) \cos(v(t)) + 2 d \left(\frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) + 3 g \sin(v(t)) \right) = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

Тут використано синтаксис мови Maple і обрано позначення: $u(t)$ – величина горизонтального положення візка в момент часу t ; $v(t)$ – величина кута відхилення маятника від вертикалі; $g = 9,81$.

Розв'язувати систему рівнянь (1) будемо чисельно за допомогою методу Рунге-Кутти з початковими умовами $u(0) = u_0$, $u'(0) = Du_0$, $v(0) = v_0$, $v'(0) = Dv_0$.

Наведемо приклад розрахунку нехаотичної траєкторії руху маятника за умови обчислення коефіцієнту жорсткості k залежно від інших сталих параметрів системи. Для визначеності оберемо значення параметрів (усі в умовних одиницях): $m_1 = 1$; $m_2 = 20$; $d = 5$. Початкові умови обрано такі: $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$, $v(0) = \pi/3$, $v'(0) = 0$.

Чисельно розв'яжемо систему рівнянь (1) та побудуємо наближене зображення інтегральної кривої у фазовому просторі $\{u, Du, t\}$. Зображення складатиметься із множини відрізків, що з'єднують послідовні точки, одержані в результаті наближеного розв'язання системи рівнянь. Це уявлення залежатиме від певного значення «управляючого» параметра k . При випадкових значеннях k у фазовому просторі $\{u, Du, t\}$ утвориться «плутана» інтегральна крива, проекція якої на фазову площину $\{u, Du\}$ також буде «плутаною» фазовою траєкторією (рис. 3, а), що призведе до хаотичних рухів маятника під візком. У разі зміни значень «управляючого» параметра k має змінюватися і характер фазової траєкторії.

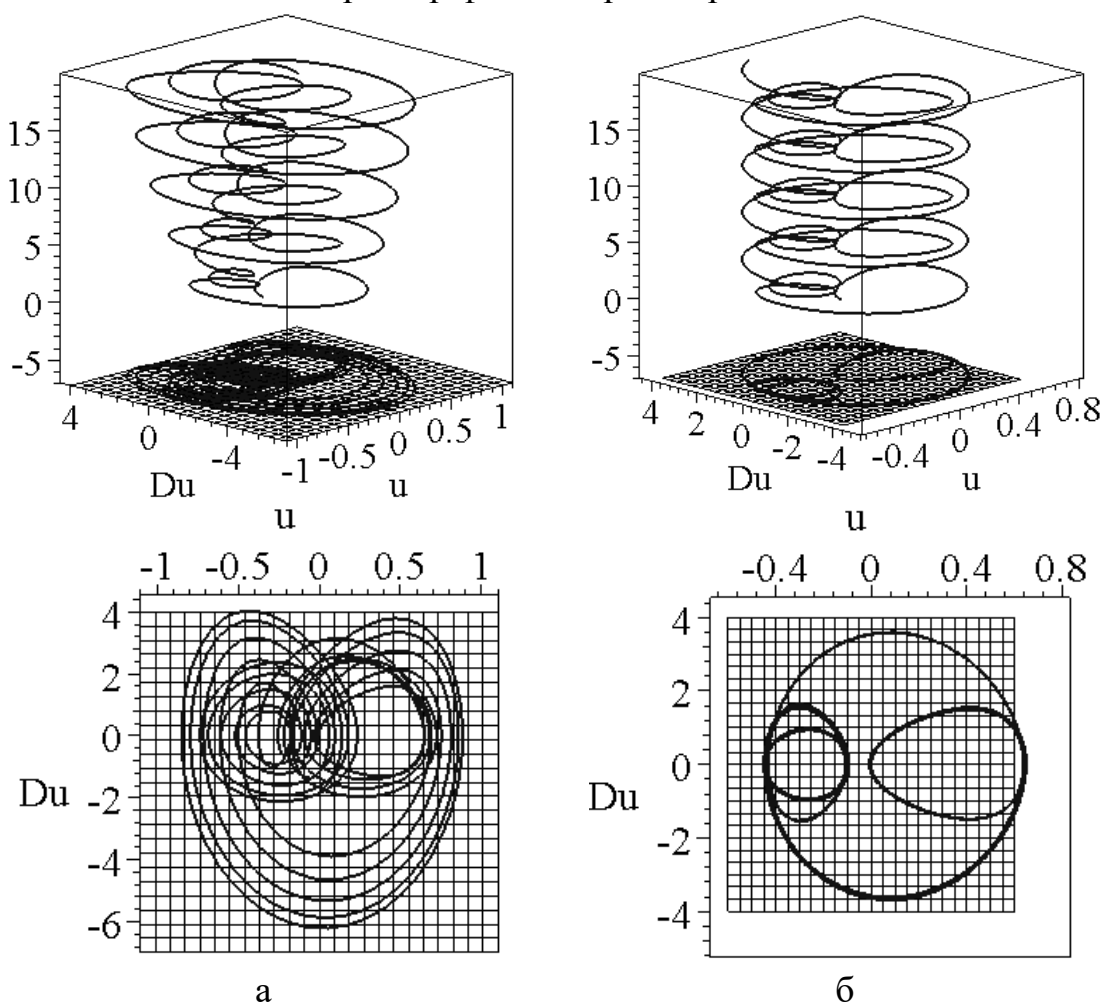


Рис. 3. Інтегральні криві і фазові траєкторії для:
а) випадкового значення k ; б) обчисленого значення $k = 323,5$.

При критичному значенні $k = 323,5$ вона зміниться на якісному

рівні – перетвориться у «сфокусовану» криву (рис. 3, б). На фазовій площині $\{u, Du\}$ здійсниться ніби оптичний ефект «наведення на різкість» плутанини фазових траєкторій (відбудеться проєкційне фокусування [4, 5]). Урахування значення параметра $k = 323,5$ у процесі розв’язання системи рівнянь (1) дозволяє обчислити координати точок у декартовій системі координат $\{x, y\}$ (рис. 4, а), які мають розташуватися на нехаотичній траєкторії сліду маятника. При обраних «вхідних» параметрах існує декілька значень k , які спричинюють нехаотичні коливання сліду маятника (рис. 4, б–г).

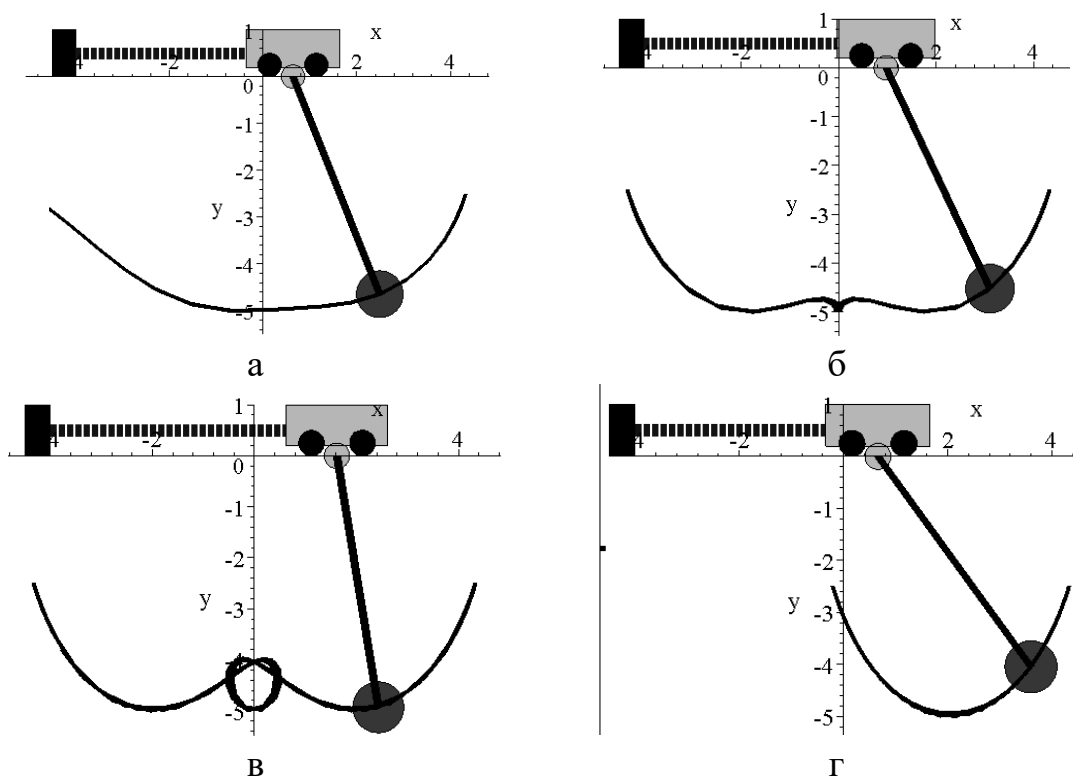


Рис. 4. Сліди маятника при значеннях параметра:
а) $k = 323,5$; б) $k = 61,6$; в) $k = 25,2$; г) $k = 0$.

Із розглянутого перевагу слід віддати варіанту з параметрами $k = 323,5$ (рис. 4, а). Це пояснюється мінімальною площею утвореної фазової траєкторії, оціненою за кількістю пікселів, що її складають, а також необхідною несиметричною формою профілю хвилі рідини, що виникла внаслідок поздовжніх коливань ємності.

Висновки. Розроблений спосіб дозволяє рекомендувати значення параметрів для нехаотичної траєкторії коливань маятника під візком, що наближає форму профілю хвилі рідини, що виникла внаслідок поздовжніх коливань ємності. Подальші дослідження будуть пов’язані з вибором параметрів коливання маятника під візком для забезпечення прогнозованої з експериментів форми траєкторії.

Література

1. Калиниченко В.А. Волны Фарадея в подвижном сосуде и их механический аналог [Электронный ресурс] / С. Аунг Наинг // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2013. – № 12. Режим доступа: <http://engjournal.ru/catalog/eng/teormech/1138.html>
2. Гриднев С.Ю. Использование механического аналога жидкости для моделирования колебаний автоцистерны при разгоне и торможении / С.Ю. Гриднев, А.Н. Будковой // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. – 2011. – № 1. – С. 98-106.
3. Гриднев С.Ю. Динамическое воздействие автоцистерн с отсеками на пути при учете гидроудара / С.Ю. Гриднев, А.Н. Будковой // Строительная механика и конструкции. – 2012. – №4, т.2. – С.116-121.
4. Семків О.М. Метод визначання особливих траєкторій коливань вантажу 2d-пружинного маятника / О.М. Семків // Вісник ХНАДУ/ХНАДУ. – Харків, 2015. – № 71. – С. 36-44.
5. Семків О.М. Особенности геометрической формы колебаний груза 2d-пружинного маятника / О.М. Семків // VII Международная конференция по научному развитию Евразии. – Вена, 2015. – С. 214-217.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА
ПОД ТЕЛЕЖКОЙ НА ПРИМЕРЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ
МОДЕЛИ ЖИДКОСТИ В ЕМКОСТИ**

Семків О.М., Семенова-Кулиш В.В.

Рассмотрен метод определения нехаотического следа колебаний маятника под тележкой, объединенного с пружиной, который приближает форму профиля волны жидкости, возникшей в результате продольных колебаний емкости.

Ключевые слова: профиль волны жидкости, маятник под тележкой, волны Фарадея, механический аналог колебания жидкости.

**MODELING OSCILLATION OF PENDULUM UNDER THE
TRUCK AS MECHANICAL MODEL OF LIQUID IN VESSEL**

O. Semkiv, V. Semenova-Kulish

A method for determining the non-chaotic trace of oscillations of a pendulum under the truck, combined with a spring, which brings the wave profile of fluid as a result of longitudinal vibrations of the container is examined.

Keywords: fluid wave profile, the pendulum under the truck, Faraday waves, mechanical vibrations analogue liquid.