УДК 519.632.4

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЇ ВНУТРІШНЬОЇ КОНДЕНСАЦІЇ В МСЕ

Тулученко Г.Я., д.т.н.,
Старун Н.В., к.т.н.,
Маломуж Т.В., к.т.н.
Херсонський національний технічний університет (*Україна*)

У роботі доведено твердження про те, що задача мінімізації сліду матриці жорсткості для трикутного скінченного елемента лагранжевого типу третього та вищих порядків і задача побудови гармонічних базисів для тих же елементів є еквівалентними задачами на множині функцій, що отримують із стандартних базисних за допомогою операції внутрішньої конденсації.

Ключові слова: метод скінченних елементів, операція внутрішньої конденсації, слід матриці жорсткості.

Постановка проблеми. Дослідження впливу величини сліду матриці жорсткості на точність отримуваних розв’язків у методі скінченних елементів (МСЕ) і дослідження доцільності застосування базисів, що складаються із гармонічних функцій, проводяться відокремлено. Перехід від стандартних базисів до гармонічних супроводжується зменшенням величини сліду матриці жорсткості. Але результатів порівняльного аналізу розв’язків обох задач у доступних літературних джерелах не виявлено.

Аналіз основних досліджень і публікацій. Питання побудови гармонічних базисів для трикутних СЕ досліджуються у роботах [1-3]. Особливістю цих досліджень є те, що в них розглядаються СЕ серендипового типу, а базисні функції подаються у вигляді тригонометричних рядів.

Доцільність використання величини сліду матриці жорсткості елемента для прогнозування апроксимаційних властивостей базису доводиться у роботах [4-5].

Формулювання цілей статті. Довести ***твердження*** про те, що застосування операції внутрішньої конденсації до базисних функцій лагранжевих трикутних СЕ третього і вищих порядків приводить до побудови одного і того ж базису у задачі мінімізації сліду матриці жорсткості і у задачі побудови базису, що складається із гармонічних функцій (або функцій, що найменше ухиляються від гармонічних).

Основна частина. Нехай трикутний СЕ має n вузлів на сторонах і m внутрішніх вузлів. Позначимо за N базисні функції, які асоційовані із зовнішніми вузлами на сторонах, а за M – базисні функції, які асоційовані із внутрішніми вузлами. Відзначимо, що вираз кожної базисної функції, що асоційована із внутрішнім вузлом, у своєму складі має множники, які відповідають рівнянням сторін трикутника:

$$M_j = g_1(x;y)\cdot g_2(x;y)\cdot g_3(x;y)\cdot f_j(x;y), \tag{1}$$

де $g_p(x;y)=0$ $\left(p=\overline{1;3}\right)$ – рівняння сторін трикутника; $f_j(x;y)$ – деякий степеневий поліном.

У результаті виконання операції внутрішньої конденсації отримаємо новий базис NC, функції якого задаються виразами:

$$NC_i = N_i + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} M_j\,, \tag{2}$$

де $\alpha_{i,j}$ – шукані параметри; $i=\overline{1;n}$; $j=\overline{1;m}$; для кожного j виконується рівність $\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,j}=1$.

Слід матриці жорсткості за умови одиничної матриці коефіцієнтів пружності середовища для конденсованого базису обчислюється за формулою [4]:

$$trace\left(k^{(e)}\right)=\sum_{i=1}^{n}\iint_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial NC_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial NC_i}{\partial y}\right)^2\right)dxdy\cdot \tag{3}$$

Таким чином, для обраної структури базисних функцій (2) найкращим базисом для СЕ є той, для якого

$$T = trace\left(k^{(e)}\right)\to \min\ . \tag{4}$$

Функціонал (4) є сумою додатних доданків, тому його мінімальне значення складається із суми мінімальних значень кожного окремого доданка, тобто задача мінімізації сліду матриці жорсткості розпадається на n незалежних задач мінімізації для кожної окремої базисної функції NC_i, $i=\overline{1;n}$:

$$T_i=\iint_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial NC_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial NC_i}{\partial y}\right)^2\right)dxdy\to\min\,,\ i=\overline{1;n}. \tag{5}$$

Для їх розв’язання підставимо вирази шуканих базисних функцій NC_i (2) у функціонали виду (5):

$$T_i=\iint_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial NC_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial NC_i}{\partial y}\right)^2\right)dxdy=$$

$$= \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} N_i \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} N_i \right)^2 \right) dxdy +$$

$$+ \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} M_j \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} M_j \right)^2 \right) dxdy + \tag{6}$$

$$+ 2 \cdot \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} N_i \cdot \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} M_j \right) dxdy + 2 \cdot \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial y} N_i \cdot \frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} M_j \right) dxdy .$$

Обчислення подвійних інтегралів із двох останніх доданків формули (6) за допомогою методу інтегрування частинами з урахуванням структури базисних функцій (1) приводять до виразів:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} N_i \cdot \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} M_j \right) dxdy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} \cdot \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} M_j dxdy ;$$

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial y} N_i \cdot \frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} M_j \right) dxdy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \cdot \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} M_j dxdy .$$

Звідки маємо, що

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} N_i \cdot \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} M_j \right) dxdy + \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial y} N_i \cdot \frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} M_j \right) dxdy =$$

$$= - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \right) \cdot \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} M_j dxdy .$$

Таким чином, функціонали з формули (6) остаточно мають вигляд:

$$T_i = \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} N_i \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} N_i \right)^2 \right) dxdy +$$

$$+ \iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} M_j \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} M_j \right)^2 \right) dxdy - \tag{7}$$

$$- 2 \cdot \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} \right) \cdot \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} M_j dxdy .$$

Висновки. Функціонали T_i (7) відрізняються від функціоналів, що приводять до побудови гармонічних функцій за методом Рітца, наявністю першого доданка $\iint_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} N_i \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} N_i \right)^2 \right) dxdy$.

Задачі мінімізації цих функціоналів розв'язуються за допомогою систем рівнянь, в яких частинні похідні від функціоналів за невідомими ваговими коефіцієнтами $\alpha_{i,j}$ функцій M_j дорівнюють нулю. Доданок, на який відрізняються вказані функціонали, не містить невідомих коефіцієнтів $\alpha_{i,j}$. Отже, частинні похідні від нього за коефіцієнтами $\alpha_{i,j}$ дорівнюють нулю. Таким чином, при розв'язанні обох задач мінімізації функціоналів ми отримуємо одну і ту саму систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка має єдиний розв'язок, і відповідно, названі задачі приводять до побудови одного і того самого базису.

Окремо відзначимо, що у разі неможливості отримання гармонічних базисних функцій при застосуванні операції внутрішньої конденсації (як це має місце, наприклад, для трикутного СЕ третього порядку [6]), задача мінімізації функціоналів з методу Рітца приводить до побудови базисних функцій, які найменше відхиляються від гармонічних у нормі метрики L_2 [7].

Література

1. Пашковский А.В. Численно-аналитические методы стандартных элементов для моделирования стационарных физических полей в линейных кусочно-однородных и нелинейных средах: дис. … доктора техн. наук: 05.13.18 / Александр Владимирович Пашковский. – Новочеркасск, 2014. – 364 с.
2. Юлдашев О.И. Проекционно-сеточные методы для решения нелинейных эллиптических задач с дифференциальными операторами векторного анализа: автореф. дисс. на соискание учен. степени д-ра физ.-мат. наук : спец. 01.01.07 / О.И. Юлдашев. – М., 2010. – 36 с.
3. Юлдашев О.И. Гармонические базисные функции для конечных элементов высокого порядка аппроксимации [Электронный ресурс] / О.И. Юлдашев, М.Б. Юлдашева // Объединенный институт ядерных исследований. Лаборатория информационных технологий. Научный отчет 2006-2007. – Дубна: Объединенный институт ядерных исследований, 2007. – С. 317—320. – Режим доступа: http://lit.jinr.ru/Reports/SC_report_06-07/pdfall/p317.pdf.
4. Секулович М. Метод конечных элементов / М. Секулович. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
5. Kenneth H. Huebner. The Finite Element Method for Engineers / H. Huebner Kenneth, L. Dewhirst Donald, E. Smith Douglas, G. Byrom Ted. – New York: A Wiley-Interscience Publication, John Wiley&sons, Inc., 2001. – 744 p.
6. Тулученко Г.Я. Вплив операції конденсації на властивості базисних функцій трикутних скінченних елементів /

Г.Я. Тулученко // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. – 2011. – Вип. 6. – С. 248–252.
7. Безердян С.І. Порівняльний аналіз апроксимаційних властивостей базисів трикутного СЕ III порядку, що отримані за допомогою методу внутрішньої конденсації / С.І. Безердян // Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції "Проблеми математичного моделювання" (м. Дніпродзержинськ, 27-29 травня 2015 р.). – Дніпропетровськ: Біла К.О., 2015. – С. 6–7.

О СВОЙСТВАХ ОПЕРАЦИИ ВНУТРЕННЕЙ КОНДЕНСАЦИИ В МКЭ

Тулученко Г.Я., Старун Н.В., Маломуж Т.В.

В работе доказывается утверждение о том, что задача минимизации следа матрицы жесткости для треугольных конечных элементов лагранжевого типа третьего и более высоких порядков и задача построения гармонических базисов для тех же элементов являются эквивалентными задачами на множестве функций, которые получают из стандартных базисных с помощью операции внутренней конденсации.

Ключевые слова: метод конечных элементов, операция внутренней конденсации, след матрицы жесткости.

ABOUT PROPERTIES OF THE OPERATION OF THE INTERNAL CONDENSATION IN FEM

H.Ya.Tuluchenko, N. Starun, T. Malomuzh

In this paper we prove the statement that the task of the minimizing the value of stiffness matrix trace for triangular finite elements Lagrange-type with third and higher orders and the task of the constructing harmonic bases for the same elements are equivalent tasks on the set of the functions which are obtained from the standard basis with the help of the internal condensation operation.

Keywords: finite element method, operation of the internal condensation, trace of stiffness matrix.