УДК 514.18

МОДЕЛЮВАННЯ ЕРМІТОВОГО СПЛАЙНА 5-ГО СТЕПЕНЯ ІЗ ЗАДАНИМ ЗАКОНОМ КРИВИНИ

Бадаєв Ю.І., д.т.н.,
Ганношина І.М.
Київська державна академія водного транспорту
ім. Петра Конашевича-Сагайдачного (Україна)

Пропонується визначення ермітового сплайна 5-го степеня за заданими точками і та кривинами в цих точках.

Ключові слова: поліноміальний сегмент, кривина, перші і другі похідні.

Постановка проблеми. В проектуванні обводів машин і агрегатів, які працюють у рухомому середовищі (літаки, автомобілі тощо) важливим є завдання обводу за заданим законом зміни кривини. Необхідно мати аналітичний апарат вирішення цієї задачі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботах [2-6] пропонуються інтерактивні методи проектування обводів із заданою формою і кривиною, але не дають змогу передбачити результати на початку проектування.

Формулювання цілей статті. Метою статті є вивід аналітичного апарату моделювання криволінійного обводу за наперед заданим законом зміни кривини, що є важливим для проектування обводів літаків, автомобілів, суден, тощо.

Основна частина. Поставимо наступну задачу:

Заданий на площині точковий ряд:

$$\Delta : x_i, y_i, i=0,1, \dots , n,$$

а також в кожній точці задана кривина K_i.

Як відомо із [1], кривина для кривої $y = f(x)$ визначається формулою:

$$K^2 = \frac{y''^2}{(1+y'^2)^3} \tag{1}$$

Як видно з формули (1) для того, щоб задати кривину в заданій точці, необхідно як мінімум задати першу похідну y_i'. При заданій першій похідній y_i' і кривині K_i визначається величина другої похідної

$$y_i''^2 = K_i^2 (1 + y_i'^2)^3 \quad \text{або} \quad \pm y_i'' = \pm K(1 + y_i'^2)^3 . \tag{2}$$

Таким чином поставлена задача перетворюється на наступну.

Задано точковий ряд із першими і другими похідними в них

$$\Delta : x_i, y_i, y_i', y_i'', i=0,\ 1,\ \dots,\ n.$$

Будемо моделювати криву, яка будується із зі стикованих сегментів поліномів на ділянках $i \div (i+1)$. Тобто необхідно знайти таку поліноміальну криву, яка на участку $i \div (i+1)$ проходить через точки i , $(i+1)$ і має в цих точках задані похідні $y_i', y_i'', y_{i+1}', y_{i+1}''$.

Спочатку доведемо наступну теорему.

Для того, щоб поліноміальний ***сегмент*** проходив через дві задані точки 0 і 1 і мав в цих точках задані перші і другі похідні, необхідно, щоб поліном був не менше 5-го степеня.

Такий поліном визначається системою 6-и лінійних рівнянь:

$$\begin{gathered} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ y''(x_0) = y_0'' \\ y(x_1) = y_1 \\ y'(x_1) = y_1' \\ y''(x_1) = y_1''. \end{gathered}$$

Система із 6-и лінійних рівнянь розв'язується і має розв'язок тільки тоді, якщо кількість невідомих не менше і не більше 6. Поліном $y = f(x)$ має 6 коефіцієнтів тільки при 5-й степені.

Теорема доведена.

Таким чином будемо шукати поліном 5-го степеня.

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5\ . \tag{3}$$

Похідні будуть дорівнювати :

$$y' = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + 5fx^4, \tag{4}$$

$$y'' = 2c + 6dx + 12ex^2 + 20fx^3. \tag{5}$$

Підставимо в (3), (4), (5) значення координат точок $0(x_0, y_0)$ і $1(x_1, y_1)$ а також похідні в цих точках y_0' , y_0'', y_1' , y_1''. Будемо мати наступну систему із 6-и лінійних рівнянь

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 & x_0^5 \\ 0 & 1 & 2x_0 & 3x_0^2 & 4x_0^3 & 5x_0^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_0 & 12x_0^2 & 25x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 & x_1^5 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & 4x_1^3 & 5x_1^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6x_1 & 12x_1^2 & 25x_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \\ y_0'' \\ y_1 \\ y_1' \\ y_1'' \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Розв'язання цієї системи дасть нам коефіцієнти a, b, c, d, e, f, які визначать поліном (3), який задовольняє поставленій задачі.

Застосування поліному не дуже зручно, крім того необхідно розв'язувати систему 6-и лінійних рівнянь.

Тому для вирішення цієї задачі візьмемо сегмент кривої Безьє 5-го степеня [2].

$$r = r_0(1-t)^5 + 5r_1(1-t)^4 t + 10r_2(1-t)^3 t^2 + 10r_3(1-t)^2 t^3 + 5r_4(1-t)t^4 + r_5 t^5. \quad (7)$$

Перебудуємо (7) у формулу :

$$r = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 + ft^5. \quad (8)$$

В точці $r_0(x_0, y_0)$ t=0.

Отримаємо :

$$a = r_0\ ; \quad b = 5(r_1 - r_0); \quad (9)$$

$$c = 10(r_0 - 2r_1 + r_2); \qquad d = 10(r_3 + r_1 - r_0 - 3r_2); \quad (10)$$

$$e = 5(r_0 - 4r_1 + 6r_2 - 4r_3 - r_4)\ ; \quad (11)$$

$$f = (-r_0 + 5r_1 - 10r_2 + 10r_3 + 5r_4 + r_5); \quad (12)$$

$$r' = b = 5(r_1 - r_0)\ ; \quad (13)$$

$$r'' = 2c = 20(r_0 - 2r_1 + r_2). \quad (14)$$

При заданих r_0' і r_0'' із (13) та (14) будемо мати

$$r_1 = r_0 + \frac{r_0'}{5}; \quad (15)$$

$$r_2 = 2r_1 - r_0 + \frac{r_0''}{20}. \quad (16)$$

В точці r_5 (t=1) будемо мати наступні рівняння :

$$r_4 = r_5 - \frac{r_5'}{5}\ ; \quad (17)$$

$$r_3 = r_5 + 2r_4 + \frac{r_5''}{20}. \quad (18)$$

Таким чином формули (13) – (18) повністю визначають сегмент Безьє 5-го степеня, який проходить через дві точки r_0 і r_5 із заданими першими і другими похідними в них.

Висновки. В статті отриманий результат аналітичного проектування обводу за заданим законом зміни кривини. Подальші дослідження будуть проводитися щодо розробки методів управління формою проектуємого криволінійного обводу.

Література

1. Ефимов Н.В. “Высшая геометрия” / Н.В. Ефимов – М.: Издательство “Наука”, 1971 – 576с.
2. Фокс А. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве[пер. с английского] / А. Фокс, М. Пратт. – М.: Издательство “Мир”, 1982. – 304с.

3. Бадаєв Ю.І. Керування кривиною NURBS - кривої 3-го порядку за допомогою ваги контрольних вектор-точок / Ю.І. Бадаєв, А.О. Блиндарук.
4. Бадаєв Ю.І. Водний транспорт / Ю.І. Бадаєв, А.О. Блиндарук // Зб. наук. праць Київської державної академії водного трансорту. – К: КДАВТ, 2015. – №3(21) – С.103-105
5. Бадаєв Ю.І. Можливості локальної модифікації гладкої NURBS – кривої // Ю.І. Бадаєв, А.О. Блиндарук // Труды XV международной научно – практической конференции "Современные информационные и электронные технологии". – Одеса, 2014. – т.1. – С.26-27.
6. Бадаєв Ю.І. Компютерна реалізація проектування криволінійних обводів проектування криволінійних обводів методом NURBS - технологій вищих порядків / Ю.І. Бадаєв, А.О.Блиндарук // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць/ МДПУ. – Мелітополь,2014. – С. 3-6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЕРМИТОВОГО СПЛАЙНА 5-Й СТЕПЕНИ ПО ЗАДАННЫМ ТОЧКАМ И ЗАКОНУ КРИВИЗНЫ

Бадаев Ю.И., Ганношина И.Н.

Предлагается определение ермитового сплайна 5-й степени по заданным точкам и кривизнам в этих точках.

Ключевые слова: полиномиальный сегмент, кривизна, первые и вторые производные.

SIMULATION OF ERMITOV'S SPLINE OF 5-TH ORDER BY POINTS WITH A GIVEN LAW CURVATURE

Badayev Y., Gannoshina I.

Proposed definition of ermìtov's spline of 5-th order for the given points and law curvates in these points.

Keywords: polynomial segment, curvate, first and second derivatives.