

УДК 515.2

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ ПРИ КОНСТРУИРОВАНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕННОЙ КРИВОЙ

Гавриленко Е.А., к.т.н.

*Мелитопольская школа прикладной геометрии,
Таврический государственный агротехнический университет
(г. Мелитополь)*

Работа посвящена конструированию пространственной дискретно представленной кривой. Получены формулы позволяющие определять положение точек сгущения с использованием локальных систем барицентрических координат.

Ключевые слова: дискретно представленная кривая (ДПК), локальное сгущение, барицентрические координаты (БК).

Постановка проблемы. Локальное сгущение является наиболее эффективным, а иногда единственным путём решения ряда задач дискретного геометрического моделирования. Перечислим некоторые из них.

При наличии у конструируемой кривой выпуклых, вогнутых, прямолинейных участков, участков возрастания и убывания значений кривизны вдоль кривой, каждый участок формируется по отдельному алгоритму с последующей стыковкой участков.

Кроме перечисленных участков локальное сгущение целесообразно при формировании участков, требующих различного количества сгущений. Например, при формировании участков ДПК, где количество исходных точек невелико, а кривизна вдоль кривой изменяется значительно, потребуется количество сгущений большее, в сравнении с другими участками.

Использование локального сгущения – один из путей решения проблем возникающих в связи с представлением исходного точечного ряда на неравномерной сетке. Кроме того, локальное сгущение может способствовать упрощению алгоритмов формирования точек сгущения, сокращению количества необходимых вычислений, повышению точности расчетов.

Применение локального сгущения предполагает использование локальных систем координат. Выбор и использование систем координат, обеспечивающих легкий переход от глобальной системы координат к локальным и наоборот, а так же переход от одной

локальной системы координат к другой является отдельной, сложной задачей.

При формировании пространственной ДПК геометрическая схема сгущения точечного ряда значительно усложняется, в сравнении с плоским случаем. В результате возрастает как эффективность применения локального сгущения, так и сложность использования в трехмерном пространстве локальных систем координат.

Для реализации методов сгущения точечного ряда, обеспечивающих необходимую точность расчетов, возможность локальной коррекции конструируемой кривой, а так же наложение на кривую большого количества дополнительных условий, нам представляется целесообразным в качестве локальных систем координат использовать барицентрические координаты.

Анализ последних исследований и публикаций. В работе [3] рассмотрены возможности использования БК при формировании плоских ДПК. Получены необходимые формулы и сформулирована схема использования БК в качестве локальных систем координат при задании исходной ДПК в глобальной системе декартовых координат. Исследованы свойства БК с точки зрения использования их в качестве аппарата реализации геометрических схем дискретной интерполяции. Разработан ряд алгоритмов формирования плоских обводов с монотонным изменением кривизны, с использованием локальных систем барицентрических координат.

Формулирование целей статьи. Целью статьи является исследование возможности использования БК в качестве аппарата расчета геометрических схем моделирования пространственной ДПК.

Основная часть. БК точки M относительно вершин тетраэдра $i-1, i, i+1, i+2$ называются действительные числа $M_{i-1}, M_i, M_{i+1}, M_{i+2}$, такие что

$$M_{i-1} + M_i + M_{i+1} + M_{i+2} = 1,$$

и при этом точка является центром масс четырех материальных точек – вершин тетраэдра $i-1, i, i+1, i+2$, которые загружены массами $M_{i-1}, M_i, M_{i+1}, M_{i+2}$, соответственно [1].

Чтобы получить формулы перехода от системы декартовых координат к БК воспользуемся определением БК как соотношением соответствующих объёмов:

$$M_{i-1} = \frac{V_{i-1}}{V}; M_i = \frac{V_i}{V}; M_{i+1} = \frac{V_{i+1}}{V}; M_{i+2} = \frac{V_{i+2}}{V},$$

где $V, V_{i-1}, V_i, V_{i+1}, V_{i+2}$ – ориентированные объёмы тетраэдров

$i-1, i, i+1, i+2$, $M, i, i+1, i+2$, $i-1, M, i+1, i+2$, $i-1, i, M, i+2$, $i-1, i, i+1, M$ соответственно.

Ориентированный объём V базисного тетраэдра считается положительным. Ориентированный объём V_{i-1} тетраэдра $M, i, i+1, i+2$ считается положительным, если точки M и $i-1$ располагаются по одну сторону относительно плоскости, определяемой точками $i, i+1, i+2$. Аналогично определяется знак объёмов V_i, V_{i+1}, V_{i+2} .

Если объёмы $V, V_{i-1}, V_i, V_{i+1}, V_{i+2}$ выразить через декартовы координаты вершин тетраэдров [2], то получим формулы перехода от глобальной системы декартовых координат $Oxyz$ к локальной системе БК $i-1, i, i+1, i+2$:

$$M_{i-1} = \frac{\begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} & x_{i+2} & x \\ y_i & y_{i+1} & y_{i+2} & y \\ z_i & z_{i+1} & z_{i+2} & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad M_i = \frac{\begin{vmatrix} x_{i-1} & x_{i+1} & x_{i+2} & x \\ y_{i-1} & y_{i+1} & y_{i+2} & y \\ z_{i-1} & z_{i+1} & z_{i+2} & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad (1)$$

$$M_{i+1} = \frac{\begin{vmatrix} x_{i-1} & x_i & x_{i+2} & x \\ y_{i-1} & y_i & y_{i+2} & y \\ z_{i-1} & z_i & z_{i+2} & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad M_{i+2} = \frac{\begin{vmatrix} x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & x \\ y_{i-1} & y_i & y_{i+1} & y \\ z_{i-1} & z_i & z_{i+1} & z \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{i-1} & x_i & x_{i+1} & x_{i+2} \\ y_{i-1} & y_i & y_{i+1} & y_{i+2} \\ z_{i-1} & z_i & z_{i+1} & z_{i+2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решив систему уравнений (1) относительно декартовых координат точки $M(x, y, z)$ получим формулы перехода от локальной системы БК к глобальной системе декартовых координат.

$$\begin{aligned} x &= x_{i-1}M_{i-1} + x_iM_i + x_{i+1}M_{i+1} + x_{i+2}M_{i+2}; \\ y &= y_{i-1}M_{i-1} + y_iM_i + y_{i+1}M_{i+1} + y_{i+2}M_{i+2}; \\ z &= z_{i-1}M_{i-1} + z_iM_i + z_{i+1}M_{i+1} + z_{i+2}M_{i+2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь рассмотрим возможность перехода от системы БК одного тетраэдра (тетраэдра A, B, C, D) к системе БК другого тетраэдра (тетраэдра $1, 2, 3, 4$).

Пусть БК точки M в системе тетраэдра A, B, C, D – $M(M_A, M_B, M_C, M_D)$. Тогда можно записать [1]:

$$M = AM_A + BM_B + CM_C + DM_D. \quad (3)$$

В системе другого тетраэдра $1, 2, 3, 4$ положение точек A, B, C, D определяют БК: $A(A_1, A_2, A_3, A_4)$, $B(B_1, B_2, B_3, B_4)$, $C(C_1, C_2, C_3, C_4)$, $D(D_1, D_2, D_3, D_4)$. Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} A &= 1A_1 + 2A_2 + 3A_3 + 4A_4; \\ B &= 1B_1 + 2B_2 + 3B_3 + 4B_4; \\ C &= 1C_1 + 2C_2 + 3C_3 + 4C_4; \\ D &= 1D_1 + 2D_2 + 3D_3 + 4D_4. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив (4) в (3), после преобразований, получаем:

$$\begin{aligned} M &= 1(A_1M_A + B_1M_B + C_1M_C + D_1M_D) + \\ &2(A_2M_A + B_2M_B + C_2M_C + D_2M_D) + \\ &3(A_3M_A + B_3M_B + C_3M_C + D_3M_D) + \\ &4(A_4M_A + B_4M_B + C_4M_C + D_4M_D). \end{aligned}$$

Учитывая, что $M = 1M_1 + 2M_2 + 3M_3 + 4M_4$, окончательно получаем формулы перехода системы БК тетраэдра A, B, C, D к системы БК тетраэдра $1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} M_1 &= A_1M_A + B_1M_B + C_1M_C + D_1M_D; \\ M_2 &= A_2M_A + B_2M_B + C_2M_C + D_2M_D; \\ M_3 &= A_3M_A + B_3M_B + C_3M_C + D_3M_D; \\ M_4 &= A_4M_A + B_4M_B + C_4M_C + D_4M_D. \end{aligned} \quad (5)$$

Выводы. Формулы (1,2,5), позволяют сделать вывод о целесообразности использования локальных систем БК при формировании пространственной ДПК. Расчет координат точек сгущения может осуществляться по следующей схеме. Исходная ДПК задается в глобальной системе декартовых координат. Каждая точка сгущения определяется в собственной локальной системе БК относительно вершин тетраэдра, являющихся последовательными точками исходного точечного ряда. Передача информации от одной локальной системы БК к другой осуществляется при помощи формул (5). При этом БК вершин тетраэдров в системах которых определяются точки сгущения вычисляются по формулам (1). После определения БК точек сгущения осуществляется переход к исходной системе декартовых координат по формулам (2).

Литература

1. Балк М.Б. Геометрия масс / М.Б. Балк, В.Г. Болтянский. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
2. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1970. – 720 с.
3. Гавриленко Е.А. Дискретное интерполирование плоских одномерных обводо́в с закономерным изменением кривизны: дисс. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / Гавриленко Евгений Андреевич. – Мелитополь, 2004. – 182 с.

ВИКОРИСТАННЯ БАРИЦЕНТРИЧНИХ КООРДИНАТ ПРИ КОНСТРУЮВАННІ ПРОСТОРОВОЇ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЛЕНОЇ КРИВОЇ

Гавриленко Є.А.

Робота присвячена конструюванню просторової дискретно представленої кривої. Отримані формули, що дають можливість визначати положення точок згущення з використанням локальних систем барицентричних координат.

Ключові слова: дискретно представлена крива (ДПК), локальне згущення, барицентричні координати (БК).

USE BARYCENTRIC COORDINATES FOR THE CONSTRUCTION OF SPATIAL DISCRETELY REPRESENTED CURVE

E. Gavrilenko

The work is devoted to construction of the spatial discretely presented curves. Formulas which allow to determine the position of the thickening points with the use of local systems of barycentric coordinates are obtained.

Keywords: discretely presented curve (DPC), local thickening, barycentric coordinates (BC).