УДК 514.18

ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ ПРОСТОРОВОГО ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

Семків О.М. , к.т.н.
Національний університет цивільного захисту України (м. Харків),
Челомбитько В.Ф., к.т.н.
Харківський національний університет радіоелектроніки (Україна)

Розглядається вибір значень параметрів для одержання нехаотичних траєкторій коливань вантажу просторових пружинних маятників.

Ключові слова: просторовий пружинний маятник, рівняння Лагранжа 2-го роду, траєкторія переміщення вантажу.

Постановка проблеми. Математичні просторові пружинні маятники є універсальними моделями для дослідження процесів, описаних певним класом диференціальних рівнянь [1-3]. Ці маятники трактуються як приклад двох лінійних систем, пов'язаних параметрично і нелінійно. Показано, що при відношенні частот 2:1 цих систем відбувається повне перекачування енергії кутових коливань в енергію вертикальних і назад.

Можливість виникнення таких явищ необхідно враховувати під час розрахунку різноманітних конструкцій (висячі мости, вантово-балкові системи, канатні дороги, лінії електропередачі, різні космічні тросові системи для утримання об'єктів, гнучкі шланги, різноманітні антени і т.д.). Модель просторового пружинного маятника знаходить застосування в будівельній механіці для аналізу умов, за яких виявляються ефекти втрати динамічної стійкості надзвукових літаків, швидкохідних кораблів тощо [1,2].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Існує значна кількість публікацій, присвячених математичним просторовим пружинним маятникам [1-3]. Для ілюстрації розв’язків цих рівнянь необхідно вміти будувати просторові форми траєкторій переміщення (центра) вантажу пружинних маятників [3].

Тоді за аналогією розв’язки можна використати і в подібних за змістом задачах. Тому ці дослідження доцільно було б доповнити розробкою способу графічного унаочнення траєкторій коливань вантажу як результату розв’язання диференціальних рівнянь для їх опису з метою виявлення серед них нехаотичних траєкторій.

Формулювання цілей статті. Розробити графічний комп'ютерний метод вибору значень параметрів для одержання нехаотичних траєкторій коливань вантажу просторових пружинних маятників.

Основна частина. Для опису динаміки коливань пружинного маятника в декартових координатах *Ouvw* використаємо [3] систему диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{u}(t) = -\frac{k\left(\sqrt{\mathrm{u}(t)^2+\mathrm{v}(t)^2+\mathrm{w}(t)^2}-L0\right)\mathrm{u}(t)}{m\sqrt{\mathrm{u}(t)^2+\mathrm{v}(t)^2+\mathrm{w}(t)^2}}\;;\\
&\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{v}(t) = -\frac{k\left(\sqrt{\mathrm{u}(t)^2+\mathrm{v}(t)^2+\mathrm{w}(t)^2}-L0\right)\mathrm{v}(t)}{m\sqrt{\mathrm{u}(t)^2+\mathrm{v}(t)^2+\mathrm{w}(t)^2}}\;;\\
&\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{w}(t) = -\frac{k\left(\sqrt{\mathrm{u}(t)^2+\mathrm{v}(t)^2+\mathrm{w}(t)^2}-L0\right)\mathrm{w}(t)}{m\sqrt{\mathrm{u}(t)^2+\mathrm{v}(t)^2+\mathrm{w}(t)^2}}-g\;.
\end{aligned} \tag{1}$$

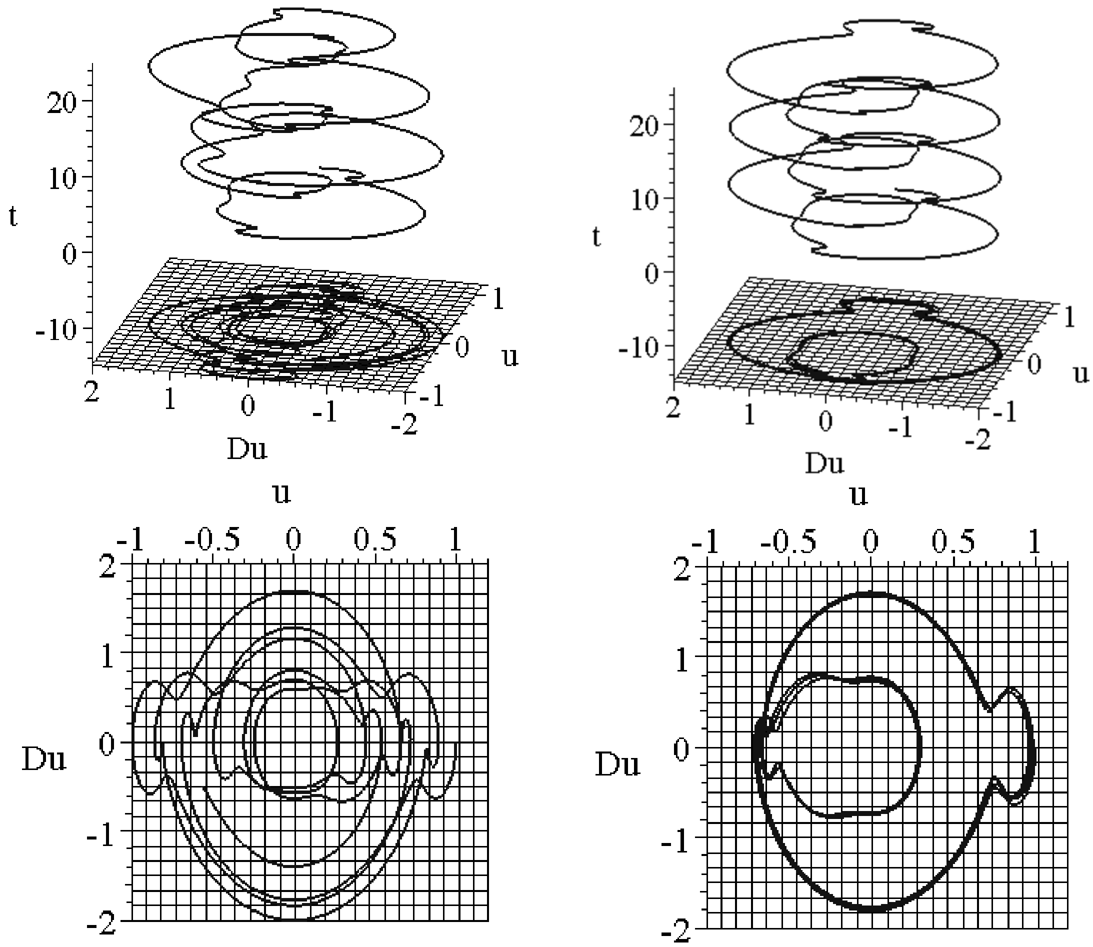
Тут використано такі позначення: $u(t)$, $v(t)$ і $w(t)$ – координати (центра) вантажу пружинного маятника в момент часу t ; $L0$ – довжина пружини у ненавантаженому стані; k – коефіцієнт жорсткості пружини; m – маса вантажу; $g = 9{,}81$. Точка кріплення маятника знаходиться на початку координат.

Розв'язувати систему диференціальних рівнянь будемо чисельним методом Рунге-Кутти з умовами: $u0$, $v0$ і $w0$ – початкові координати вантажу в «нульовий» момент часу; $du0$, $dv0$ і $dw0$ – початкові швидкості маятника у напрямах відповідних координат.

Для визначення значень параметрів $u0$, $v0$, $w0$, $du0$, $dv0$ і $dw0$, які б забезпечили *нехаотичну просторову траєкторію* руху вантажу маятника, застосуємо метод проекційного фокусування [4]. Для цього чисельним методом із обраними (наприклад) початковими умовами $u0 = 1$; $du0 = 0$; $v0 = 0$; $w0 = 1.1$; $dw0 = 0$ і з урахуванням значень параметрів $k = 9$; $m = 1$ і $L0 = 1$ розв'язуємо систему рівнянь (1) і будуємо зображення інтегральної кривої у фазовому просторі.

Спочатку побудуємо зображення у фазовому просторі $\{u, Du, t\}$ залежно від певного значення «керуючого» параметра. Як «керуючий» можна обрати будь-який параметр задачі (наприклад, $dv0$) за умови, що всі інші значення параметрів будуть фіксованими. При випадкових значеннях параметрів у фазовому просторі $\{u, Du, t\}$ утвориться «плутана» інтегральна крива (рис. 1,а). Спроектуємо її на фазову площину $\{u,Du\}$, де також спостерігаємо відповідну «плутану» фазову траєкторію.

У разі зміни значень «керуючого» параметра має змінюватися і характер фазової траєкторії. При певному критичному значенні характер фазової траєкторії зміниться на якісному рівні – вона перетвориться в «закономірну» криву (рис. 1, б). На фазовій площині спостерігатиметься ніби оптичний ефект «наведення на різкість» плутанини фазових траєкторій. Завдяки цій аналогії запропоноване знаходження критичних значень параметрів названо проекційним фокусуванням [4].



а б

Рис. 1. Фазові траєкторії як проекції інтегральних кривих:
а) для довільного значення параметра (*dv0* = 0,48);
б) для критичного значення параметра (*dv0* = 0,587)

Все це має місце і для побудови зображення інтегральної кривої у фазовому просторі $\{v\ Dv,\ t\}$. На рис. 2, а зображено фазові траєкторії як проекції інтегральних кривих для випадкового значення *dv0* = 0,48, а на рис. 2,б – для критичного значення «керуючого» параметра *dv0* = 0,587.

Урахування значення параметра *dv0* = 0,587 у процесі розв'язання системи рівнянь (1) спричинить обчислення координат точок у просторі $\{u,v,w\}$ (рис. 3), які мають розташуватися на нехаотичній траєкторії (або близькій до неї).

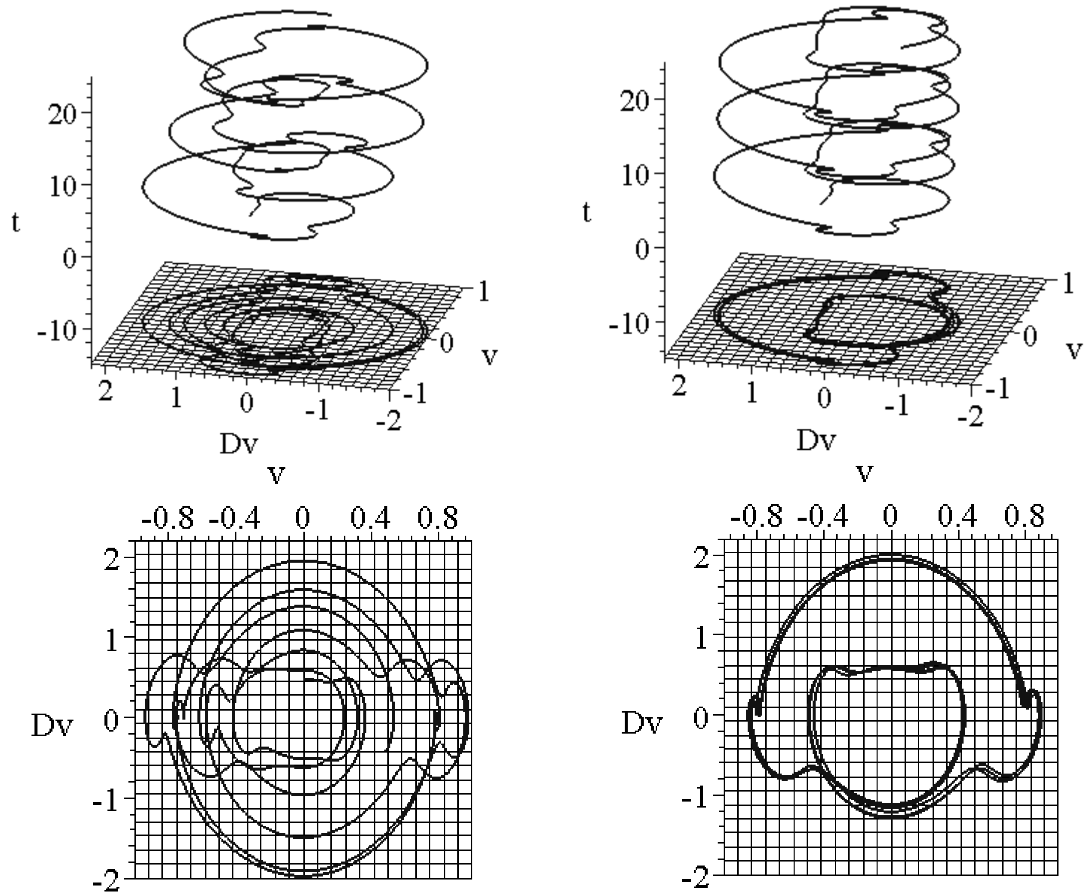
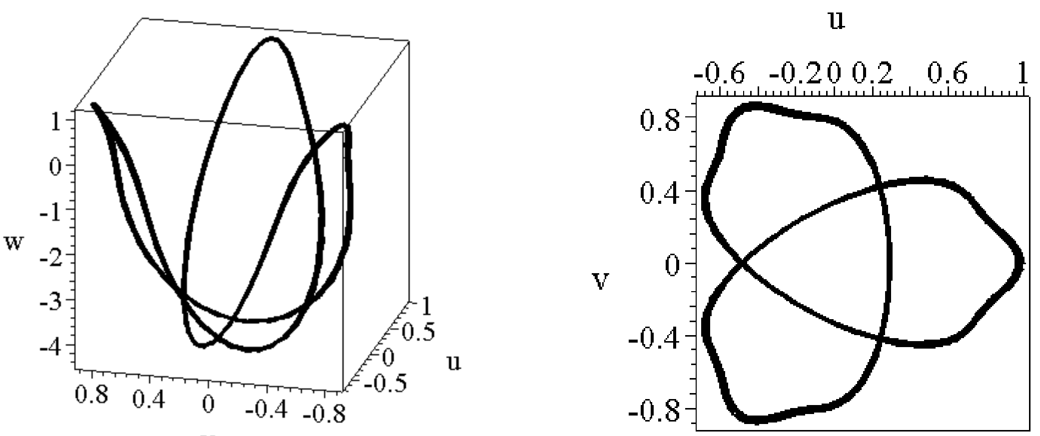


Рис. 2. Фазові траєкторії як проекції інтегральних кривих:
а) для довільного значення параметра (*dv0* = 0,48);
б) для критичного значення параметра (*dv0* = 0,587)



а б

Рис. 3. Просторова траєкторія руху вантажу (а)
та її проекція на площину Ouv (б)

Висновки. Розроблений спосіб дозволяє вибрати значення параметрів для одержання нехаотичних траєкторій коливань вантажу пружинного маятника. Подальші дослідження будуть пов’язані з вибором параметрів для забезпечення необхідної форми траєкторії.

Література
1. Булдакова Д.А. Модель качающегося пружинного маятника в истории физики и техники / Д.А. Булдакова, А.В. Кирюшин // Ученые заметки Тихоокеанского государственного университета. – Хабаровск, 2015. – Том 6. – № 2. – С. 238–243.
2. Бубнович Э.В., Молдаганапова А.Г. К вопросу об исследовании резонансов при вынужденных взаимосвязанных колебаниях гибкой нити [Електронный ресурс] / Э.В. Бубнович, А.Г.Молдаганапова // Режим доступа: http://portal.kazntu.kz/files/publicate/%20Молдаганапова%20.pdf.
3. Xiao O. Dynamics of the Elastic Pendulum. [Електронний ресурс] / O. Xiao, S. Xia // Режим доступу: http://math.arizona.edu/~gabitov/teaching/141/math_485/Midterm_Presentations/Elastic_Pedulum.pdf.
4. Семків О.М. Метод визначання особливих траєкторій коливань вантажу 2d-пружинного маятника / О.М. Семків // Вісник ХНАДУ/ХНАДУ. – Харків, 2015. – № 71. – С. 36-44.
5. Semkiv O.M. Computer graphics of the oscillation trajectories of 2d spring pendulum weight/ O.M. Semkiv// European Applied Sciences: challenges and solutions. – ORT Publishing: Stuttgart, 2015. –C.63–70.
6. Семкив О.М. Особенности геометрической формы колебаний груза 2d-пружинного маятника / О.М. Семкив // VII Международная конференция по научному развитию Евразии.– Вена, 2015.– С. 214-217.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

Семкив О.М. , Челомбитько В.Ф.

Рассматривается выбор значений параметров для получения нехаотических траекторий колебаний груза пространственных пружинных маятников.

Ключевые слова: пространственный пружинный маятник, уравнение Лагранжа 2-го рода, траектория перемещения груза.

GEOMETRICAL DESIGN OF VIBRATIONS SPATIAL SPRING PENDULUM

O. Semkiv, V. Chelombitko

The choice of values of parameters is examined for the receipt of unchaotic trajectories of vibrations of load of spatial spring pendulums.

Keywords: a spatial spring pendulum, equalization of Lagrange 2th family, trajectory of moving of load.