УДК 514.18

УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ КРИВИЗНОЙ В МЕТОДЕ ВАРИАТИВНОГО ФОРМИРОВАНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ УГЛОВЫХ ПАРАМЕТРОВ

Спиринцев Д.В., к.т.н.,
Балюба И.Г., д.т.н.
Мелитопольская школа прикладной геометрии,
Мелитопольский государственный педагогический университет им. Богдана Хмельницкого (Украина)
Спиринцев В.В., к.т.н.,
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара (Украина)

В работе исследуется вопрос управления кривизной дискретно представленной кривой (ДПК) в процессе сгущения на основе метода вариативного формирования разностных схем угловых параметров.

Ключевые слова: дискретно представленная кривая, интерполяция, вариативное дискретное геометрическое моделирование, кривизна ДПК, метод вариативного формирования разностных схем угловых параметров.

Постановка проблемы. Важным элементом, характеризующим форму кривой, является «степень искривленности» или «кривизна» ее в различных точках, которую можно выразить числом [7]. Естественно кривизну кривой в дифференциальной геометрии характеризовать углом поворота касательной, рассчитанным на единицу длины дуги (рис. 1), т.е. отношением ω/σ. Это отношение носит название средней кривизны длины дуги.

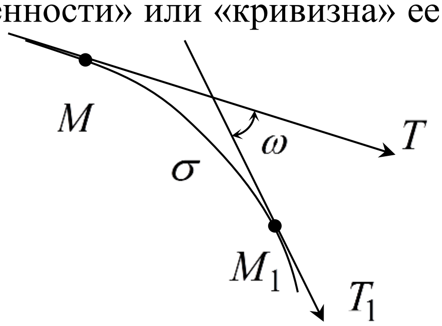

Рис. 1

На различных участках кривой средняя кривизна ее будет, вообще говоря, различной (за исключением окружности). Поэтому от понятия средней кривизны дуги MM_1, переходят часто к понятию кривизны в точке, определяемой как предел, к которому стремится средняя кривизна дуги MM_1, когда точка M_1 вдоль кривой стремится к M [7], т.е.

$$k = \lim_{\sigma \to 0} \frac{\omega}{\sigma} \quad (1)$$

где k - кривизна кривой в данной точке.

В дифференциальной геометрии во многих исследованиях представляется удобным приближенно заменять кривую вблизи рассматриваемой точки - окружностью, имеющей туже кривизну, что и кривая в этой точке (рис. 2). Это, так называемый, круг кривизны в данной на ней точке M, который:

– касается кривой в т. M;

– направлен выпуклостью вблизи этой точки в ту же сторону что и кривая;

– имеет ту же кривизну что и кривая в т. M.

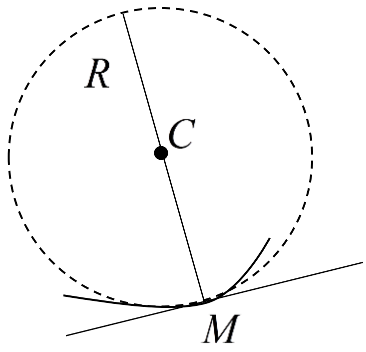

Рис. 2

Центр C круга кривизны называется центром кривизны и лежит на нормали к кривой в рассматриваемой точке со стороны выпуклости.

Однако, большинство исходных данных представлены дискретно и, зачастую, не могут быть представлены аналитической зависимостью, поэтому, актуальным становится вопрос изучения и управления соответствующими аналогами, которые предлагаются [3] для ДПК.

Анализ последних исследований и публикаций. Вопросом определения и применения в процессе сгущения дискретной кривизны кривой рассматривало многие ученые [1,2,4,6]. Так, например, в работе [4] предлагается формировать обводы второго порядка гладкости на основе специальной функции. В работе [1] была обнаружена связь между длиной звеньев сопроводительной ломаной линии и углами смежности. Предложенный способ был использован в работе [6], однако он позволяет определять только среднюю кривизну на сгущаемом участке без возможности управления ею. Поэтому изучение вопроса изменения и возможности управления кривизной ДПК в процессе сгущения является актуальной задачею.

Формулирование целей статьи. Управление кривизной ДПК в процессе сгущения при использовании метода вариативного формирования разностных схем угловых параметров.

Основная часть. Рассмотрим кривую в контексте вариативного дскретного геометрического моделирования, в которой кривая представлена в виде ДПК (x_i, y_i). Проводя аналогию между рис. 1 и рис. 3, естественно предположить, что средняя кривизна дискретно представленной кривой может характеризоваться углом смежности в точке сгущения $\gamma'_{i+0,5}$ на заданном участке l_i, т.е. отношением $\frac{\gamma'_{i+0,5}}{l_i}$,

$i=\overline{0,n-1}$.

Аналогом круга кривизны, для дискретно представленной кривой может служить окружность, проведенная через три последовательных точки ДПК (рис. 3).

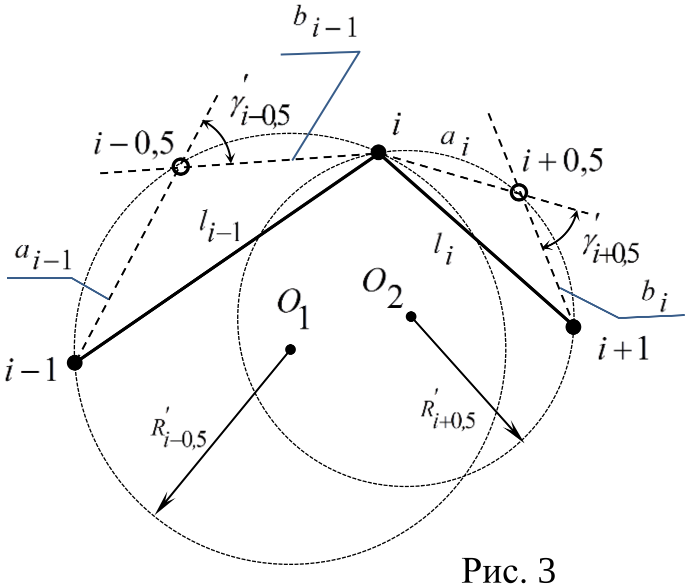

Рис. 3

Таким образом, в процессе сгущения мы можем для сгущаемых участков контролировать значение радиусов кривизны моделируемой кривой. Поскольку угол в $\Delta(i-1)(i-0{,}5)i$ при вершине $(i-0{,}5)$, $i=\overline{1,n}$ является тупым, то рассматриваемый Δ является тупоугольным. А, как известно из курса аналитической геометрии, центр описанной около тупоугольного треугольника окружности лежит вне треугольника. Численное значение радиуса описанной окружности (радиуса кривизны) в данном случае можно определить из теоремы синусов (для звена $i-(i+1)$):

$$2R'_{i+0,5}=\frac{a_i}{\sin\beta_{(i+1)-}}=\frac{b_i}{\sin\beta_{i+}}=\frac{l_i}{\sin\gamma'_{i+0,5}},\qquad i=\overline{0,n-1}, \tag{2}$$

где углы β_{i+} и $\beta_{(i+1)-}$, согласно [5], составляют некоторую фиксированную часть от угла смежности $\gamma'_{i+0,5}$ в точке сгущения, т.е.

$$\begin{matrix}\beta_{i+}=\eta_i\cdot\gamma_{i+0,5}\\ \beta_{(i+1)-}=(1-\eta_i)\cdot\gamma_{i+0,5}\end{matrix},\ i=\overline{0,n-1}, \tag{3}$$

где η_i – коэффициент соотношения угловых параметров, определяемый из выражения:

$$\eta_i=\frac{\gamma_i^0}{\gamma_i^0+\gamma_{i+1}^0},\ \ i=\overline{0;n-1}. \tag{4}$$

Таким образом, мы получаем возможность управлять кривизной в точках сгущения кривой в процессе ее сгущения.

Однако, контролируя процесс сгущения ДПК на участках $(i-1)-i$ и $i-(i+1)$, $i=\overline{1,n-1}$ с учетом дискретной ее кривизны (рис. 4), мы не контролируем значение дискретной кривизны в точке i. А поскольку для динамических обводов одним из определяющих является условие монотонности изменения кривизны, то нам необходимо будет учесть и это.

На рис. 4 изображен фрагмент ДПК на котором для обоих звеньев $((i-1)-i)$ и $(i-(i+1))$ заданы центры круга кривизны $C_{i-0.5}$ и $C_{i+0.5}$, причем $R_{i-0.5} < R_{i+0.5}$.

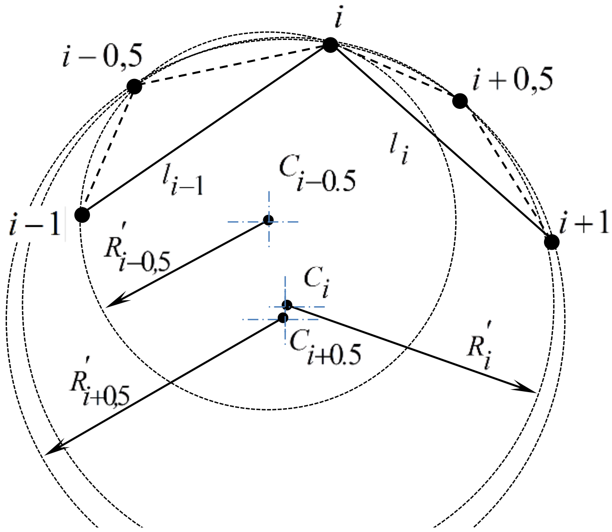

Рис. 4

Для того чтоб добиться монотонного изменения кривизны, полученной в процессе сгущения ДПК, необходимо в процессе сгущения контролировать её на трех участках: $((i-1)-i)$, $((i-0{,}5)-(i+0{,}5))$, $(i-(i+1))$. При этом необходимо выполнения условия:

$$\begin{matrix} R_{i-0,5} < R_i < R_{i+0,5}, \\ R_{i-0,5} > R_i > R_{i+0,5}, \end{matrix} \text{ или } i=\overline{1,n-1}, \tag{5}$$

где значения радиусов кривизны определяем из выражения (2)

$$2R_{i-0,5} = \frac{l_i}{sin\gamma'_{i-0,5}} \Rightarrow R_{i-0,5} = \frac{l_i}{2sin\gamma'_{i-0,5}};$$

$$2R_{i+0,5} = \frac{l_i}{sin\gamma'_{i+0,5}} \Rightarrow R_{i+0,5} = \frac{l_i}{2sin\gamma'_{i+0,5}};$$

$$2R_i = \frac{C_i}{sin\gamma'_i} \Rightarrow R_i = \frac{C_i}{2sin\gamma'_i}.$$

C_i можно выразить из $\Delta(i-0{,}5)i(i+0{,}5)$ используя теорему косинусов:

$$C_i^2 = b_{i-1}^2 + a_i^2 - 2b_{i-1}\cdot a_i \cdot cos(180-\gamma'_i), \tag{6}$$

где длины звеньев a_i та b_{i-1} определяются из выражения

$$\frac{a_i}{sin\beta_{(i+1)-}} = \frac{l_i}{sin\gamma'_{i+0,5}} \Rightarrow a_i = l_i\frac{sin\beta_{(i+1)-}}{sin\gamma'_{i+0,5}} = l_i\frac{sin[(1-\eta_i)\gamma'_{i+0,5}]}{sin\gamma'_{i+0,5}};$$

$$\frac{b_{i-1}}{sin\beta_{(i-1)+}} = \frac{l_{i-1}}{sin\gamma'_{i-0,5}} \Rightarrow b_{i-1} = l_{i-1}\frac{sin\beta_{(i-1)+}}{sin\gamma'_{i-0,5}} = l_{i-1}\frac{sin[\eta_i\cdot\gamma'_{i-0,5}]}{sin\gamma'_{i-0,5}}.$$

Тогда

$$C_i = \sqrt{\left(l_{i-1}\frac{sin\left[\eta_i \cdot \gamma'_{i-0,5}\right]}{sin\gamma'_{i-0,5}}\right)^2 + \left(l_i\frac{sin\left[(1-\eta_i)\gamma'_{i+0,5}\right]}{sin\gamma'_{i+0,5}}\right)^2 + \\ + 2 \cdot l_{i-1} \cdot l_i \cdot \frac{sin\left[\eta_i \cdot \gamma'_{i-0,5}\right] \cdot sin\left[(1-\eta_i)\gamma'_{i+0,5}\right]}{sin\gamma'_{i-0,5} \cdot sin\gamma'_{i+0,5}} \cdot cos\gamma'_i}.$$

С учетом полученного выражения, формула (5) примет вид:

$$R_i - R_{i-1} > 0, \text{ или } R_i - R_{i-1} < 0,\ i = \overline{1, n-1}$$

$$\frac{\sqrt{\left(l_{i-1}\frac{sin\left[\eta_i \cdot \gamma'_{i-0,5}\right]}{sin\gamma'_{i-0,5}}\right)^2 + \left(l_i\frac{sin\left[(1-\eta_i)\gamma'_{i+0,5}\right]}{sin\gamma'_{i+0,5}}\right)^2 + \\ 2 \cdot l_{i-1} \cdot l_i \cdot \frac{sin\left[\eta_{i-1} \cdot \gamma'_{i-0,5}\right] \cdot sin\left[(1-\eta_i)\gamma'_{i+0,5}\right]}{sin\gamma'_{i-0,5} \cdot sin\gamma'_{i+0,5}} \cdot cos\gamma'_i}}{2 sin\gamma'_i} - \frac{l_i}{2 sin\gamma'_{i-0.5}} > 0 \quad (7)$$

Полученное дополнительное условие в совокупности с условием отсутствия осцилляции:

$$\gamma_{i+0,5} > 0, \text{ или, } \gamma_{i+0,5} < 0,\ i = \overline{1, n-1} \quad (8)$$

для разностных схем [5] формируют некую область решения, из которой и будем выбирать значения управляющих параметров.

Выводы. Предложенные в работе исследования позволяют при использовании метода на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров в процессе сгущения учитывать не только отсутствие осцилляции, но и управлять кривизной ДПК, что в целом расширяет возможности формообразования и конструирования дифференциально геометрических характеристик ДПК. Дальнейшие исследования могут быть направлены на оптимизацию выбора управляющих параметров из многоугольника решений с учетом возможных значений границ кривизны.

Литература

1. Верещага В.М. Дискретно–параметрический метод геометрического моделирования кривых линий и поверхностей: дисс. ...д–ра техн. наук: 05.01.01 / В.М. Верещага. – Мелитополь, ТГАТА. 1996. – 320с.
2. Гавриленко Е.А. Дискретное интерполирование плоских одномерных обводов с закономерным изменением кривизны. Дисс. … к-та. техн. наук: 05.01.01/ Е.А. Гавриленко. – Мелитополь, ТГАТА, 2004, – 149с.
3. Найдиш В.М. Основи прикладної дискретної геометрії [навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів III-IV рівнів

акредитації] / В.М. Найдиш, В.М. Верещага, А.В. Найдиш, В.М. Малкіна. – Мелітополь: ТДАТУ, 2007. – 194с.
4. Найдиш В.М. Формування обводів другого порядку гладкості на основі спеціальної функції / В.М. Верещага, В.М. Щербина // В кн.: Сучасні проблеми геометричного моделювання. Матеріали міжнародної науково-практичної конференції, – Львів, 2003, – С.83-85.
5. Спиринцев Д.В. Дискретная интерполяция на основе вариативного формирования разностных схем угловых параметров: дисс. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / Д.В. Спиринцев. – Мелітополь, ТГАТУ, 2010. – 214 с.
6. Спірінцев Д.В. Управління кривиною ДПК у методі варіативного формування різницевих схем кутових параметрів/ А.В. Найдиш, Д.В. Спірінцев // Прикл. геом. та інж. графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 88. – С. 21-29.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и інтегрального исчисления/ Г.М. Фихтенгольц – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – т.1 – 616с.

УПРАВЛІННЯ ДИСКРЕТНОЮ КРИВИНОЮ В МЕТОДІ ВАРІАТИВНОГО ФОРМУВАННЯ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ КУТОВИХ ПАРАМЕТРІВ

Спірінцев Д.В., Спірінцев В.В., Балюба І.Г.

В роботі досліджується питання управління кривизною дискретно представленої кривої в процесі згущення на основі методу варіативного формування різницевих схем кутових параметрів.

Ключові слова: дискретно представлена крива, інтерполяція, варіативної дискретне геометричне моделювання, дискретна кривизна, кутові параметри.

CONTROL DISCRETE CURVATURE IN THE METHOD VARIABLE FORMATION DIFFERENCE SCHEME ANGULAR PARAMETERS

D. Spirintsev, V. Spirintsev, I. Balyuba

We study how to manage the discrete curvature of the curve in the process of thickening based on the method of formation of the difference schemes of variable angular parameters.

Keywords: discrete representation of the curve, interpolation, variability discrete geometric modeling, discrete curvature, angle settings.