УДК 514.18

ВІДНОСНИЙ РУХ ЧАСТИНКИ ВЗДОВЖ ПРЯМОЛІНІЙНОЇ ЛОПАТКИ НА ВІДЦЕНТРОВОМУ АПАРАТІ

Чепіжний А.В., аспірант*
Сумський національний аграрний університет (Україна),
Несвідомін В.М., д.т.н.,
Грищенко І.Ю., к.т.н.
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ)

В роботі знайдено закон відносного руху частинки вздовж прямолінійної лопатки на відцентровому апараті. Задача розв'язана з допомогою застосування двох координатних систем – рухомої і нерухомої. Складено параметричні рівняння абсолютної траєкторії руху частинки. Отримано розв'язок у кінцевому вигляді.

Ключові слова: вектор прискорення, прикладені сили, абсолютна траєкторія, диференціальні рівняння, відносний рух.

Постановка проблеми. Дослідження руху матеріальних частинок по горизонтальному диску із ортогонально прикріпленими прямолінійними лопатками при його обертанні навколо вертикальної осі є теоретичною основою при проектуванні відцентрових апаратів для розсіювання мінеральних добрив. Рух частинки в таких апаратах є складним: він складається із переносного руху частинки при обертанні диска і відносного її руху вздовж лопатки. Внаслідок цього ускладнюється задача відшукання кінематичних параметрів частинки у такому русі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Рух частинки вздовж прямолінійних лопаток горизонтального диска, що обертається навколо вертикальної осі, досить повно досліджено в працях [1-3]. Теорія такого руху ґрунтується на тому, що рух точки досліджується одночасно по відношенню до двох систем координат. Одна з них (основна) приймається за нерухому, а друга здійснює по відношенню до нерухомої відносний рух за заданим законом. В свою чергу у рухомій системі координат здійснюється відносний рух частинка. Сума цих рухів (відносного і переносного) складає абсолютний рух частинки по відношенню до основної системи координат. В праці [4] за рухому систему координат взято супровідний тригранник Френе

---

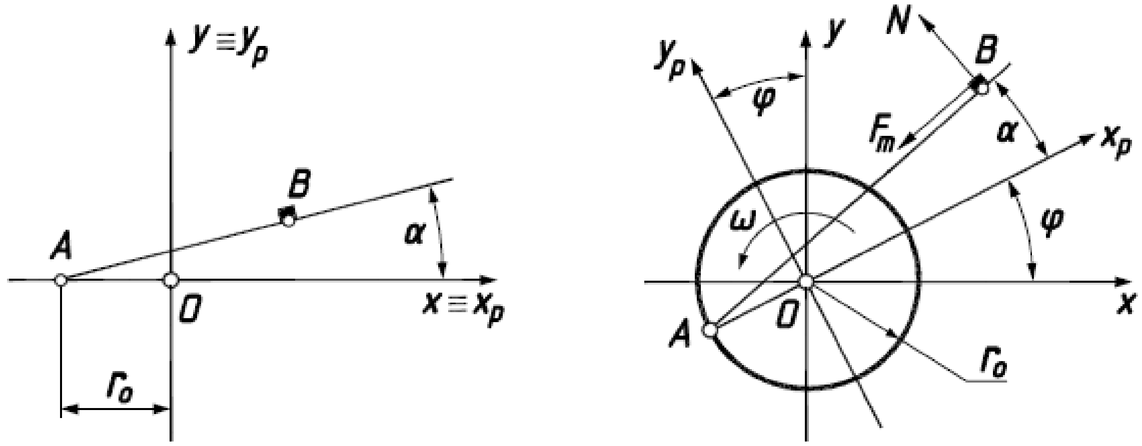
* Науковий керівник – д.т.н., професор Пилипака С.Ф.

траєкторії переносного руху.

Формулювання цілей статті. Знайти закон відносного переміщення частинки вздовж прямолінійної лопатки на прикладі відцентрового апарата із горизонтальним диском.

Основна частина. Візьмемо дві плоскі системи координат, які в початковий момент збігаються: нерухому Oxy і рухому Ox_py_p. Вважатимемо, що до рухомої системи прикріплена прямолінійна вертикальна лопатка, яка перетинає вісь Ox_p в точці A і нахилена до неї під кутом α (рис. 1,а). При повороті рухомої системи на кут φ навколо спільного початку координат лопатка займе нове положення, при цьому її точка A опише дугу кола радіуса r_0 (рис. 1,б). Якщо задати постійну кутову швидкість ω обертання рухомої системи разом із лопаткою, то за час t вона повернеться на кут φ: $\varphi=\omega t$. За цей же час частинка B під дією відцентрової сили переміститься вздовж лопатки від свого початкового положення (рис. 1,а) в нове на деяку відстань u (рис. 1,б). Залежність переміщення частинки від часу $u=u(t)$ у відносному русі є невідомою функцією, яку будемо розшукувати. Положення частинки у рухомій системі координат запишемо в проекціях на її осі через кут α:

$$x_p = u\cos\alpha - r_0; \qquad y_p = u\sin\alpha. \qquad (1)$$



а б

Рис. 1. Нерухома Oxy і рухома Ox_py_p системи координат із закріпленою прямолінійною лопаткою AB в рухомій системі:

а) обидві системи збігаються на початку руху;

б) рухома система повернута відносно нерухомої на кут $\varphi=\omega t$

За час t рухома система разом із лопаткою повернеться по відношенню до нерухомої на кут $\varphi=\omega t$. За відомими формулами повороту можна записати:

$$\begin{aligned} x &= (u\cos\alpha - r_0)\cos\omega t - u\sin\alpha\sin\omega t; \\ y &= (u\cos\alpha - r_0)\sin\omega t + u\sin\alpha\cos\omega t. \end{aligned} \qquad (2)$$

Зважаючи на те, що величина переміщення частинки вздовж лопатки *u=u(t)* є функцією часу *t*, параметричні рівняння (2) описують абсолютну траєкторію руху частинки в нерухомій системі координат.

Проекції абсолютної швидкості і абсолютного прискорення частинки на осі нерухомої системи координат знайдемо послідовним диференціюванням рівнянь (2) по часу *t*. Після диференціювання (2) і групування членів отримуємо проекції абсолютної швидкості:

$$\begin{aligned} x' &= u'\cos(\alpha+\omega t) - u\omega\sin(\alpha+\omega t) + r_0\omega\sin\omega t; \\ y' &= u'\sin(\alpha+\omega t) + u\omega\cos(\alpha+\omega t) - r_0\omega\cos\omega t. \end{aligned} \tag{3}$$

Після диференціювання виразів (3) і спрощень отримуємо проекції вектора абсолютного прискорення:

$$\begin{aligned} x'' &= u''\cos(\alpha+\omega t) + \\ &\quad +\omega\left[r_0\omega\cos\omega t - u\omega\cos(\alpha+\omega t) - 2u'\sin(\alpha+\omega t)\right]; \\ y'' &= u''\sin(\alpha+\omega t) + \\ &\quad +\omega\left[r_0\omega\sin\omega t - u\omega\sin(\alpha+\omega t) + 2u'\cos(\alpha+\omega t)\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Диференціальні рівняння абсолютного руху частинки в проекціях на осі нерухомої системи координат запишемо у наступному вигляді:

$$mx'' = F_X; \qquad my'' = F_Y; \qquad mz'' = F_Z, \tag{5}$$

де m – маса частинки;

x'', y'', z'' - проекції вектора абсолютного прискорення (4);

F_X, F_Y, F_Z - проекції рівнодійної прикладених до частинки сил на осі нерухомої системи координат.

Вздовж осі *Oz* переміщення відсутнє, отже $z''=0$, а прикладеними силами є вага частинки mg, де $g=9{,}81$ *м/с*^{2}, і реакція N_z горизонтального диска, тобто $F_z=N_z-mg$. Отже, із останнього рівняння (5) маємо: $N_z=mg$. В горизонтальній площині диска прикладеними до частинки в точці *B* силами є сила тертя F_m, спрямована в протилежну сторону ковзання частинки вздовж лопатки (рис. 1,б) і сила реакції N зі сторони лопатки, спрямована перпендикулярно до неї. Сила тертя F_m включає в себе дві складові: сила тертя по горизонтальному диску fmg, де f - коефіцієнт тертя частинки по диску і fN – сила тертя по лопатці. При цьому мається на увазі, що матеріал диска і лопатки однаковий, тобто коефіцієнт f для них є спільним. Таким чином, сила тертя запишеться: $F_{m=}$ $f(mg+N)$. Тепер ми можемо записати проекції прикладених до частинки сил на осі рухомої системи координат через кут α (рис. 1,б):

$$\begin{aligned} F_{Xp} &= -f(mg+N)\cos\alpha - N\sin\alpha; \\ F_{Yp} &= -f(mg+N)\sin\alpha + N\cos\alpha. \end{aligned} \tag{6}$$

Оскільки ми складаємо диференціальні рівняння в проекціях на осі нерухомої системи координат, то проекції сил (6) теж потрібно повернути на кут $\varphi=\omega t$ разом із рухомою системою:

$$\begin{aligned} F_X &= -\left[f\left(mg+N\right)\cos\alpha + N\sin\alpha\right]\cos\omega t + \\ &\quad +\left[f\left(mg+N\right)\cos\alpha - N\sin\alpha\right]\sin\omega t; \\ F_Y &= -\left[f\left(mg+N\right)\cos\alpha + N\sin\alpha\right]\sin\omega t - \\ &\quad -\left[f\left(mg+N\right)\cos\alpha - N\sin\alpha\right]\cos\omega t. \end{aligned} \tag{7}$$

Підставимо вирази прискорень (4) і вирази прикладених сил (7) в перші два рівняння (5) і отримаємо систему двох диференціальних рівнянь із двома невідомими залежностями $u=u(t)$ і $R=R(t)$. Розв'яжемо її відносно u'' і N і отримаємо:

$$\begin{aligned} u'' &= u\omega^2 - f\left(2u'\omega + g\right) + r_0\omega^2\left(f\sin\alpha - \cos\alpha\right); \\ N &= m\omega\left(2u' - r_0\omega\sin\alpha\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Проаналізувавши (8), ми бачимо, що перше рівняння є незалежним. Його можна розв'язати і отримати залежність $u=u(t)$. Нижче наводимо спрощений розв'язок при $\alpha=0$, тобто для радіально установленої лопатки:

$$u = \frac{fg}{\omega^2} + r_0 + c_1 e^{\left(-f-\sqrt{1+f^2}\right)\omega t} + c_2 e^{\left(-f+\sqrt{1+f^2}\right)\omega t}, \tag{9}$$

де c_1, c_2 – постійні інтегрування.

Диференціювання залежності (9) дасть вираз швидкості ковзання частинки вздовж прямолінійної лопатки, а його підстановка у друге рівняння (8) дасть залежність сили тиску N.

Рівняння (9) точно збігається із аналогічним рівнянням в праці [2] (рівняння (7.1.8), (7.1.9), стор. 366), хоча одержані вони при зовсім різних підходах. В праці [2] визначався напрям прискорення Коріоліса за правилом Жуковського, яке в нас теж присутнє в проекціях на осі координат.

Висновки. Один із шляхів при розв'язуванні задачі на динаміку частинки у складному русі полягає у складанні параметричних рівнянь абсолютної її траєкторії, в яких за невідому функцію приймається закон відносного переміщення. Послідовним диференціюванням рівнянь траєкторії по часу знаходять швидкість і прискорення. Далі задача розв'язується на основі другого закону Ньютона.

Література

1. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. – К.: УАСХН, 1960. – 283 с.
2. Заика П.М. Избранные задачи земледельческой механики /

П.М. Заика. – К.: Изд-во УСХА, 1992. – 507 с.
3. Адамчук В.В. Теоретичне дослідження розгону мінеральних добрив розсіювальним органом / В.В. Адамчук // Механізація і енергетика сільського господарства. IV міжнародна науково-технічна конференція ”Motrol 2003”. – Том 6. – К.: НАУ, 2003. – С. 19-31.
4. Пилипака С.Ф. Дослідження руху матеріальної частинки по горизонтальному диску, який обертається навколо вертикальної осі, за допомогою рухомого натурального тригранника і формул Френе / С.Ф. Пилипака // Механізація та електрифікація сільського господарства. Міжвідомчий тематичний науковий збірник. – Глеваха, 2005. – Вип. 89. – С. 49-60.

ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ ВДОЛЬ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ЛОПАТКИ НА ЦЕНТРОБЕЖНОМ АППАРАТЕ

Чепижный А.В., Несвидомин В.Н., Грищенко И.Ю.

Найден закон относительного движения частицы вдоль прямолинейной лопатки на центростремительном аппарате. Задача решена с помощью использования двух координатных систем – подвижной и неподвижной. Составлено параметрические уравнения абсолютной траектории движения частицы. Получено решение в конечном виде.

Ключевые слова: вектор ускорения, приложенные силы, абсолютная траектория, дифференциальное уравнение, относительное движение.

RELATIVE MOTION OF THE CORPUSCLE ALONG THE RECTILINEAR VANE ON THE CENTRIFUGAL MEANS

A. Chepyzhniy, V. Nesvidomin, I. Griscenko

The law of relative movement of a particle along a rectilinear vane on the centripetal device is discovered. The problem is solved by means of use of two co-ordinate systems - mobile and motionless. It is made parametric equations of an absolute mechanical trajectory of a corpuscle. The solution in a final form is gained.

Keywords: acceleration vector, applied force, trajectory absolute, differential equation, the relative motion.