

УДК 514.18

## ВИЗНАЧЕННЯ ГРАДІЄНТА СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ, ЗАДАНОГО НА ПЛОСКІЙ НЕВПОРЯДКОВАНІЙ МНОЖИНІ ТОЧОК

Черняк В.І., к.т.н.

*Кременецький лісотехнічний коледж (Україна)*

*В роботі розглядається спосіб визначення градієнта дискретного скалярного поля, заданого на неупорядкованій множині точок.*

*Ключові слова: градієнт, дискретне скалярне поле, триангуляція.*

**Постановка проблеми.** Розглянемо умови і метод визначення градієнта скалярного поля засобами MATLAB.

Нехай маємо аналітично задане скалярне поле  $u = -x^2 - y^2 + 2$ . Необхідно визначити градієнт поля в точці (2,3).

Градієнт у класичній теорії поля в даній точці визначається за формулою [1]

$$\mathit{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} = -2xi - 2yj = -2 \cdot 2\mathbf{i} - 2 \cdot 3\mathbf{j} = -4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} \quad (1)$$

Основна умова визначення градієнта засобами MATLAB – векторне поле повинне бути задане дискретно на прямокутній монотонній сітці (тобто на однозначній монотонно зростаючій або спадній), можна і на нерівномірній сітці.

Засобами MATLAB координати градієнта поля в вершині сітки  $U_5$  (рис. 1, а) визначаються за формулами

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_6 - U_4}{X_2 - X_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_2 - U_8}{Y_2 - Y_1} \quad (2)$$

У випадку рівномірної сітки з кроком  $h_x=h_y=1$ , наприклад, координати шуканої точки  $X_0=2$ ,  $Y_0=3$ , координати суміжних вузлів сітки  $X_1=1$ ,  $X_2=3$ ,  $Y_1=2$ ,  $Y_2=4$ , величина поля у вузлах сітки

$$\begin{aligned} U_4 &= -X_1^2 - Y_0^2 + 2 = -1^2 - 3^2 + 2 = -8; \\ U_6 &= -X_2^2 - Y_0^2 + 2 = -3^2 - 3^2 + 2 = -16; \\ U_8 &= -X_0^2 - Y_1^2 + 2 = -2^2 - 2^2 + 2 = -6; \\ U_2 &= -X_0^2 - Y_2^2 + 2 = -2^2 - 4^2 + 2 = -18 \end{aligned}$$

Координати градієнта поля в заданій точці

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_6 - U_4}{X_2 - X_1} = \frac{-16 - (-8)}{3 - 1} = -4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_2 - U_8}{Y_2 - Y_1} = \frac{-18 - (-6)}{4 - 2} = -6,$$

що відповідає координатам, визначеним за формулою (1).

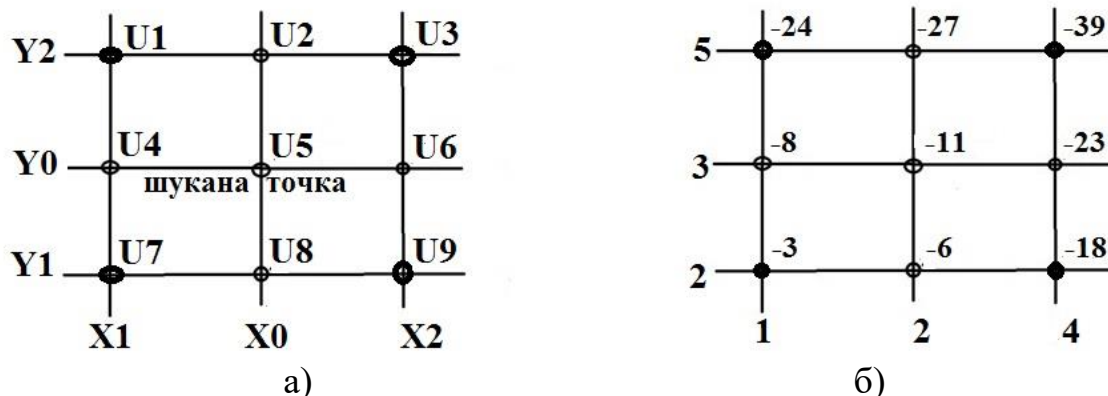


Рис.1. Фрагмент скалярного поля на прямокутній сітці:  
а) координати сітки; б) значення координат на нерівномірній сітці

У випадку нерівномірної сітки, наприклад  $X_0=2$ ,  $Y_0=3$ ,  $X_1=1$ ,  $X_2=4$ ,  $Y_1=2$ ,  $Y_2=5$  (рис. 1, б)

$$U_4 = -X_1^2 - Y_0^2 + 2 = -1^2 - 3^2 + 2 = -8;$$

$$U_6 = -X_2^2 - Y_0^2 + 2 = -4^2 - 3^2 + 2 = -23;$$

$$U_8 = -X_0^2 - Y_1^2 + 2 = -2^2 - 2^2 + 2 = -6;$$

$$U_2 = -X_0^2 - Y_2^2 + 2 = -2^2 - 5^2 + 2 = -27.$$

Координати градієнта поля в заданій точці

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_6 - U_4}{X_2 - X_1} = \frac{-23 - (-8)}{4 - 1} = -5;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_2 - U_8}{Y_2 - Y_1} = \frac{-27 - (-6)}{5 - 2} = -7,$$

не відповідають координатам, визначеним аналітично за формулою (1).

У випадку, коли скалярне поле, задане на невпорядкованій множині точок, даний метод взагалі не можна застосовувати.

Тому виникає необхідність розробки методу визначення градієнта дискретного скалярного поля, заданого довільно.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** В працях [2,3] при визначенні контурів зображень на кольорових зображеннях градієнт обчислюється за різницевиими формулами:

$$\begin{aligned} G_X &= (U_7+2U_8+U_9) - (U_1+2U_2+U_3), \\ G_Y &= (U_3+2U_6+U_9) - (U_1+2U_4+U_7). \end{aligned} \quad (3)$$

Обидві ці величини легко обчислюються з допомогою згортки зображень з двома масками Собеля [2, 3]

$$G_Y = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} * U \quad G_X = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * U$$

Також часто використовуються маски оператора Превітта [3]

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ і } \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і Щарра [3]

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -10 & -3 \end{bmatrix} \text{ і } \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 10 & 0 & -10 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Визначимо значення градієнта скалярного поля  $u = -x^2 - y^2 + 2$  в точці (2,3), при умові, що це поле задано на нерівномірній сітці (рис.1, б), з використанням вище вказаних масок.

Маска Собеля:  $G_X = -60$ ,  $G_Y = -84$ .

Маска Превітта:  $G_X = -45$ ,  $G_Y = -63$ .

Маска Щарра:  $G_X = -240$ ,  $G_Y = -336$ .

Як видно, значення координат градієнта не відповідають значенням, обчисленим аналітично за формулами (1).

**Формулювання цілей статті.** Метою статті є розробка способу визначення градієнта дискретного скалярного поля, заданого на неупорядкованій множині точок.

**Основна частина.** Згідно [1] швидкість зміни скалярного поля по заданому напрямку рівна скалярному добутку градієнта цього поля на одиничний вектор даного напрямку.

$$\frac{du}{ds} = \text{grad } u \cdot \tau$$

В нашому випадку для скалярного поля  $u(\mathbf{r}(x,y))$  (рис. 2) при визначенні градієнта в точці  $\mathbf{r}_0$

$$du = u_1 - u_0 ; ds = |r_1 - r_0| ; \tau = \frac{r_1 - r_0}{ds}, \quad (4)$$

де  $du$  – зміна значення скалярного поля  $u$  по заданому напрямку;

$ds$  – довжина ділянки поля по заданому напрямку;

$\tau$  – одиничний вектор даного напрямку.

Алгоритм визначення градієнта  $\mathbf{g}$  скалярного поля  $u$ , заданого на неупорядкованій множині  $\mathbf{r}$ , для точки  $\mathbf{r}_0$ , ґрунтується на вище вказаному твердженні і має такий вигляд.

1. Для заданої множини точок скалярного поля виконуємо триангуляцію Делоне.

2. Визначаємо трикутники, інцидентні вершині  $\mathbf{r}_0$  (рис. 3).
3. Складаємо матриці для визначення градієнта

$$B = \begin{bmatrix} u_1 - u_0 \\ |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0| \\ u_2 - u_0 \\ |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0| \\ \dots \\ u_5 - u_0 \\ |\mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_0| \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 \\ |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0| \\ \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0 \\ |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0| \\ \dots \\ \mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_0 \\ |\mathbf{r}_5 - \mathbf{r}_0| \end{bmatrix}$$

Фактично отримано систему лінійних рівнянь

$$A * \mathbf{g} = B.$$

4. Розв'язком даної системи і будуть координати вектора градієнта  $\mathbf{g}$  в точці  $\mathbf{r}_0$ .

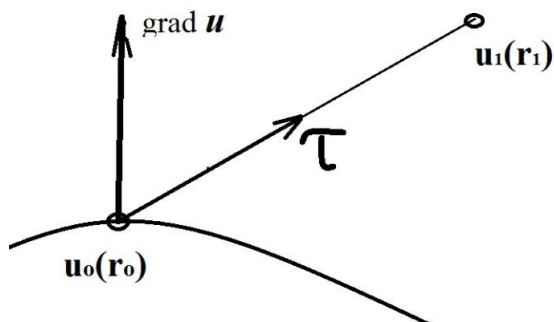


Рис. 2. До визначення градієнта в класичній теорії

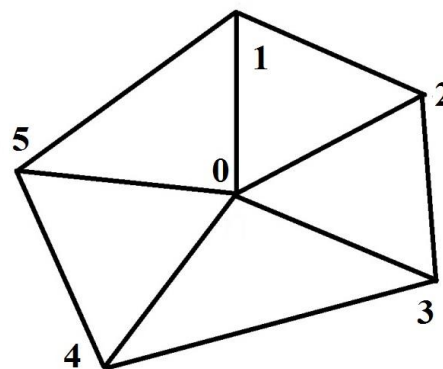


Рис. 3. Трикутники, інцидентні вершині  $\mathbf{r}_0$

Оскільки матриця  $A$  в більшості випадків є прямокутною, то при розв'язку цієї системи рівнянь використовується QR-розкладання [4].

Тестові розрахунки показали, що найбільша похибка при визначенні градієнта виникає на крайніх вершинах сітки (вершинах ребер, які належать тільки одному трикутнику). Тому в цих вершинах градієнт визначається методом інтерполяції поверхнею 2-порядку за значеннями у 10-ти найближчих внутрішніх вершинах.

В таблиці 1 наведено похибки визначення градієнта різних скалярних полів розробленим способом і засобами MATLAB по відношенню до класичного методу. Тестування проводилось на монотонній нерегулярній сітці. Верхнє число показує похибку по координаті  $x$ , нижнє – по  $y$ . Тестування обох способів на прямокутних регулярних сітках показало похибки приблизно рівні нулю.

**Висновки.** Запропоновано спосіб визначення градієнта дискретного скалярного поля, заданого на плоскій неупорядкованій множині точок. Проведено аналіз точності визначення в порівнянні з існуючими способами.

Таблиця 1

Похибка визначення градієнта різними способами

Скалярне поле	Градієнт за класичним способом	Похибка, %	
		Засоби Matlab	Розроблений спосіб
$u = \mathbf{c} * \mathbf{r}$ $\mathbf{c} = (2, 1)$ – постійний вектор	$\mathbf{grad} u = 2\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$	12	0
		22	0
$u = x^2 - y^2$	$\mathbf{grad} u = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$	3.5	1.2
		2.4	0.8
$u = 5x + 2y + y * \cos(x)$	$\mathbf{grad} u = (5 - y * \sin(x))\mathbf{i} + (2 + \cos(x))\mathbf{j}$	4.6	0.6
		10.8	0.8

**Література**

1. Гольдфайн И.А. Векторный анализ и теория поля / И.А.Гольдфайн. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 132 с.
2. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB / Р. Гонсалес, Р. Вудс, С. Эддинс. – М.: Техносфера, 2006. – 616 с.
3. Алгоритмы выделения контуров изображений [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://habrahabr.ru/post/114452/>.
4. Потемкин В.Г. Вычисления в среде MATLAB / В.Г. Потемкин. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2004. – 720 с.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ,  
ЗАДАНОГО НА ПЛОСКОМ НЕУПОРЯДОЧЕННОМ  
МНОЖЕСТВЕ ТОЧЕК**

Черняк В.И.

*В работе рассматривается способ определения градиента дискретного скалярного поля, заданного на неупорядоченном множестве точек.*

*Ключевые слова: градиент, дискретное скалярное поле, триангуляция.*

**DETERMINING THE GRADIENT OF THE SCALAR FIELD,  
DEFINED ON AN PLANAR DISORDERED SET OF POINTS**

V. Chernyak

*We consider the method of determining the gradient of the discrete scalar field defined on disordered sets of points.*

*Keywords: gradient, discrete scalar field, triangulation.*