УДК 514.18

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕОРЕМИ МОНЖА ПРО ПОДВІЙНИЙ ДОТИК ПОВЕРХОНЬ

Грицина Н.І., к.т.н.
Харківський національний автомобільно-дорожній університет (Україна)

В роботі пропонується параметри конічної поверхні, площини перерізу та кривої пов'язати між собою, що є актуальним при створенні об'єктів з подібними кривими в конструкторських системах. Для цього необхідно мати графічні методи, які дозволять це зробити без математичних розрахунків.

Ключові слова: конічні криві, еліпс, гіпербола, парабола.

Постановка проблеми. При створенні тривимірних моделей машинобудівних об'єктів, їх спряжених елементів, конструктор стикається з задачею побудови конічних кривих (еліпс, гіпербола, парабола). Але не кожна графічна система має можливості обробки таких кривих.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Графічні методи побудови конічних кривих шляхом перерізу кругового конуса площиною є в кожному підручнику з нарисної геометрії та інженерної графіки, в конспектах лекцій викладачів, в Internet. У попередніх публікаціях [1-3] наведені графічні методи, які дозволяють під певні параметри гіперболи або параболи визначити параметри конуса та площини перерізу. В цих методах параметри конуса, площини перерізу та параметри кривих не пов'язані між собою. Тобто, при перерізі конуса площиною (параметри конуса та площини перерізу наперед визначені) отримуємо конічну криву, параметри якої будуть визначені тільки після її побудови.

Формулювання цілей статті. Пропонується подивитись на ці криві з точки зору користувача конструкторської системи (конструктора), параметри конічної поверхні, площини перерізу та кривої пов'язати між собою, використовуючи при цьому можливості різних конструкторських систем. Дана робота, це пошук метода, який дозволить визначити параметри площини перерізу конуса, щоб отримати наперед заданий еліпс.

Основна частина. Площина перерізу G визначається параметрами h та β, конус визначений α (рис. 1).

В основі пошуку – теорема Монжа про подвійний дотик поверхонь.

На рис.2 циліндр *Ц* та конус, який має поверхні $K1$ та $K2$, з'єднані вершиною *S*, описані навколо сфери $C_{ф}$. Лінії *1* та *2*, це лінії перетину (два еліпса) циліндра та конуса. Зверніть увагу: мала вісь цих еліпсів не перетинає вісь конуса і завжди зміщена на величину e. Для спрощення досліджень візьмемо до уваги тільки еліпс *1*.

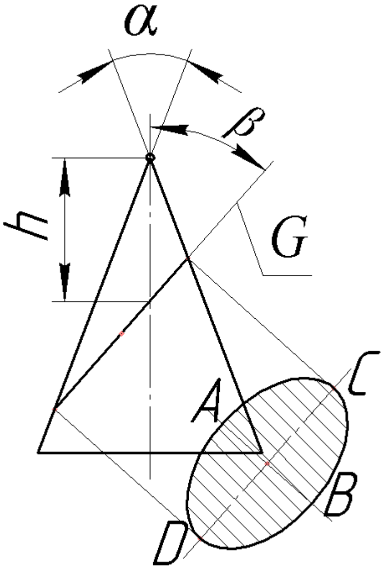


Рис. 1. Переріз конуса площиною

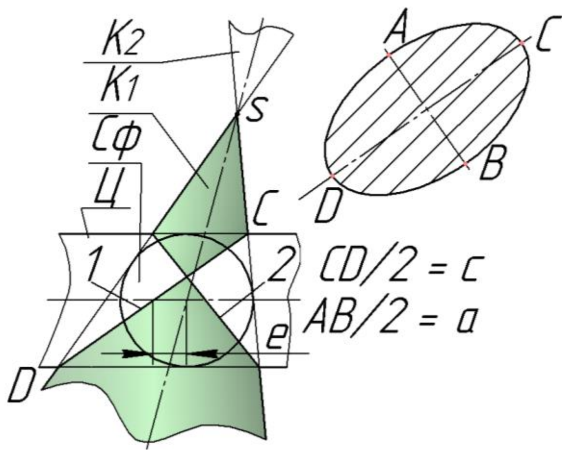
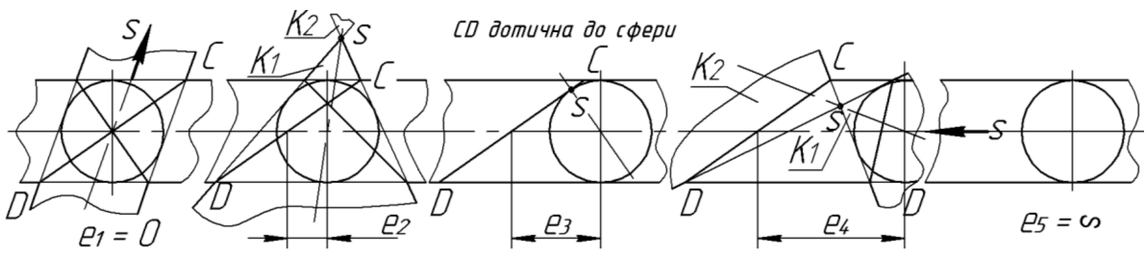


Рис.2. Циліндр та конус описані навколо сфери

Прослідкуємо, як будуть змінюватись параметри конічної поверхні (положення вершини *S*), описаної навколо сфери, при незмінних параметрах еліпса (a і c) та збільшені e ліворуч від 0 до ∞.

На рис. 3 показано п'ять характерних положень циліндра, конуса та сфери, три з яких є критичними.



а *б* *в* *г* *д*

Рис.3. Характерні положення поверхонь, описаних навколо сфери

Розглянемо критичні положення *а, в, д:*

1. Рис. 3*а* – $e = e_1 = 0$, твірні, які проходять через точки *C* і *D* та є дотичними до сфери паралельні між собою, вершина *S* конуса в недосяжності (визначити неможливо) – конус перетворився в циліндр.

2. Рис. 3*в* – $e = e_3$, *CD* дотична до сфери – твірні конічної поверхні через точки *C* і *D* паралельні (співпали), конус перетворився в площину, яка перетинає циліндр по еліпсу з заданими параметрами. Умовна вершина конуса в точці дотику *S*.

3. Рис. 3*д* – $e = e_5 = \infty$, твірні, які проходять через точки *C* і *D* та є дотичними до сфери паралельні між собою, вершина *S* конуса в недосяжності – конус перетворився в циліндр.

Розглянемо некритичні положення:

1. Рис. 3*б* – $e_1 < e_2 < e_3$ – лінії перетину поверхонь розташовані на одній частині конічної поверхні *К1*, вершина *S* конуса в межах досяжності (можливо визначити).

2. Рис. 3*г* – $e_3 < e_4 < e_5$ – лінії перетину поверхонь розташовані на різних частинах конічної поверхні *К1* та *К2*, вершина *S* конуса в межах досяжності.

Як показали подальші дослідження, вершина конуса *S*, при збільшені *e* ліворуч від 0 до $-\infty$ та незмінних параметрах еліпса, переміщується по гіперболі 1 (рис. 4). Якщо збільшувати *e* праворуч від 0 до ∞, то вершина *S* буде переміщуватись по гіперболі 2 (рис.4).

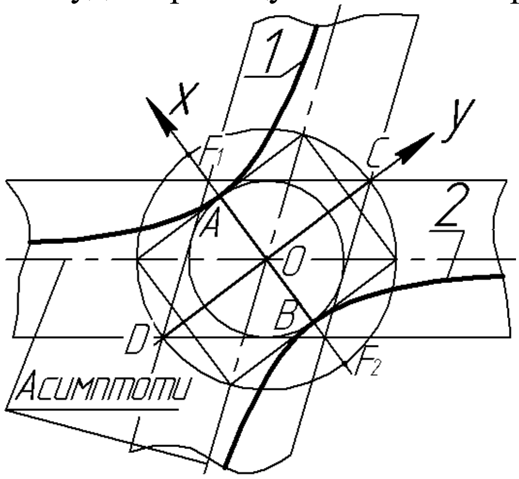


Рис.4. Траєкторія переміщення вершини конуса

Аналітично гіпербола має такий вигляд (1):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1, \quad (1)$$

де $AB = 2a$ – мала вісь еліпса дорівнює діаметру сфери;

$CB = 2c$ – велика вісь еліпса, визначає фокуси гіперболи F_1, F_2.

Вісь *y* проходить через центр сфери та по напрямку співпадає з віссю *CD* при $e_1 = 0$. Вісь *x* перпендикулярна до осі *y* та проходить через центр сфери. Асимптоти, це осі циліндрів при $e_1 = 0$.

Висновки. Основним підсумком проведених досліджень є траєкторія переміщення вершини конуса *S* (гіпербола – рівняння (1)), описаного навколо сфери. Всі параметри гіперболи визначаються тільки параметрами заданого еліпса.

Проведені дослідження дали розуміння того, як визначити параметри площини перерізу конуса, щоб отримати еліпс з наперед заданими параметрами.

Література

1. Середа І.В. Парабола – як крива конічної поверхні / І.В.Середа, Н.І.Грицина // MICROCAD 2013. Тези доповідей XXI Міжнародної науково-практичної конференції „Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта”. – Харків: НТУ «ХПІ», 2013. – С.51.
2. Середа І.В. Конічні криві в конструкторських системах. / І.В.Середа, Н.І. Грицина, Є.О. Іванов, В.А. Любарський // MICROCAD 2014. Тези доповідей XXII Міжнародної науково-практичної конференції „Інформаційні технології: наука, техніка, технологія, освіта, здоров’я”. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – С.53.
3. Грицина Н.І. Визначення параметрів конуса, на поверхні якого є криві із заданими характеристиками / Н.І. Грицина, І.В. Середа // Сучасні проблеми геометричного моделювання: зб. наук. праць. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014. – Вип. 2. – С. 30-35.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕОРЕМЫ МОНЖА О ДВОЙНОМ КАСАНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Грицына Н.И.

В работе предлагается параметры конической поверхности, плоскости сечения и кривой связать между собой, что актуально при создании объектов с подобными кривыми в конструкторских системах. Для этого необходимо иметь графические методы, которые позволят это сделать без математических расчетов.

Ключевые слова: конические кривые, эллипс, гипербола, парабола.

STUDY ON DOUBLE MONGE'S THEOREM TOUCH SURFACE

Hrytsyna N.

The paper proposes options conical surface plane curve section and link to each other, which is important when creating objects with a curve design systems. And this should be graphical methods that will do it without mathematical calculations.

Keywords: conic curves, ellipse, hyperbole, parabola.