

УДК 514.18

ВИЗНАЧЕННЯ КОНТРОЛЬНОГО БАГАТОКУТНИКА, ЩО ЗАДАЄ В-СПЛАЙН З МОНОТОННОЮ ЗМІНОЮ КРИВИНИ

Дубініна О.В., аспірант^{*},

*Мелітопольська школа прикладної геометрії,
Мелітопольський державний педагогічний університет
ім. Богдана Хмельницького (Україна)*

Гавриленко Є.А., к.т.н.,

Холодняк Ю.В., к.т.н.

*Мелітопольська школа прикладної геометрії,
Таврійський державний агротехнологічний університет
(м. Мелітополь, Україна)*

В роботі визначено умови моделювання обводів ділянками кубічного В-сплайну. Запропоновано спосіб призначення положень контрольних точок, що задають В-сплайн з монотонною зміною кривини. Визначено схему призначення у вихідних точках положень дотичних та значень радіусів кривини, при яких задача формування обводу з монотонною зміною кривини має розв'язок.

Ключові слова: неперіодичний кубічний В-сплайн, дотична, нормаль, базисний трикутник, радіус кривини, монотонна зміна кривини.

Постановка проблеми. Основною функціональною характеристикою динамічних поверхонь є регламентований характер обтікання їх середовищем. При проектуванні динамічних поверхонь важливу роль відіграють лінії, що пов'язують геометрію поверхні з її функціональним призначенням. Найчастіше необхідно забезпечити другий порядок гладкості та закономірну зміну кривини уздовж обводів, які є елементами каркасу поверхні. В цьому випадку доцільно моделювати криву локально по ділянкам, які обмежені вихідними вузлами. Отримані ділянки монотонної кривої, уздовж якої значення кривини монотонно зростають або убувають, стикаються із порядком гладкості не нижче другого. У більшості САД-пакетів одновимірні обводи формуються ділянками неоднорідних неперіодичних кубічних В-сплайнів. Для того, щоб забезпечити заданий характер зміни кривини уздовж обводу, необхідно у точках, що обмежують ділянку В-сплайну, призначити положення дотичних та значень радіусів

^{*} Науковий керівник – к.т.н., доц. Гавриленко Є.А.

кривини, при яких задача моделювання обводу із монотонною зміною кривини має розв'язок.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі [1] розроблено спосіб визначення можливості моделювання кривої із монотонною зміною кривини на основі заданого точкового ряду.

Способи формування ділянки кривої, на якій кривина змінюється монотонно запропоновані у роботах [3]. Умовами моделювання ділянки кривої є закономірна зміна кривини, задані положення дотичних та радіусів кривини у вузлах, що обмежують цю ділянку.

У роботі [3] запропоновано спосіб визначення по заданим положенням дотичних та радіусам кривини у точках, які обмежують ділянку монотонної кривої, області можливого розташування точок, що належать ділянці. При формуванні ділянки точка кривої та дотична, яка через неї проходить, визначаються всередині базисного трикутника. Базисний трикутник обмежений дотичними що проходять через два послідовних вузла та хордою, що ці вузли з'єднує.

Спосіб, який дає можливість за допомогою параметрів базисних трикутників визначити у вузлах точкового ряду діапазони значень кривини монотонної кривої розроблено у роботі [2].

Формулювання цілей статті. Метою статті є розробка способу визначення ланок багатокутника, що задає В-сплайн, при яких задача формування монотонної зміни кривини уздовж В-сплайну має розв'язок.

Основна частина. Нехай обвід з монотонною зміною кривини моделюється ділянками кубічного В-сплайну. Розглянемо ділянку $(i \dots i+1)$. У вихідних вузлах задані положення дотичних t_i, t_{i+1} та нормалей n_i, n_{i+1} відповідно (рис. 1). Положення t_i та t_{i+1} визначають першу та останню ділянку багатокутника, що задає В-сплайн ($[i \dots 1]$ та $[2 \dots i+1]$ відповідно).

Визначимо умови щодо розташування t_i, t_{i+1} та n_i, n_{i+1} , при яких можливо забезпечити монотонне зростання радіусів кривини на ділянці $(i \dots i+1)$.

Позначимо центри кривини в точках i та $i+1$ як C_i та C_{i+1} відповідно, а точку перетину нормалей – L . Трикутник $C_i; L; C_{i+1}$ будемо називати трикутником центрів кривини.

Радіуси кривини ДПК у точках i та $i+1$ дорівнюють відповідно:

$$R_i = |C_i; i|, \quad R_{i+1} = |C_{i+1}; i+1|.$$

Якщо уздовж кривої на ділянці $(i \dots i+1)$ радіуси кривини монотонно зростають, то еволюта кривої $(C_i \dots C_{i+1})$ є випуклою

кривою лінією, яка дотична до n_i та n_{i+1} у точках C_i та C_{i+1} відповідно. Одночасно довжина еволюти (ΔR) дорівнює різниці між радіусами кривини у вихідних вузлах:

$$\Delta R = R_{i+1} - R_i.$$

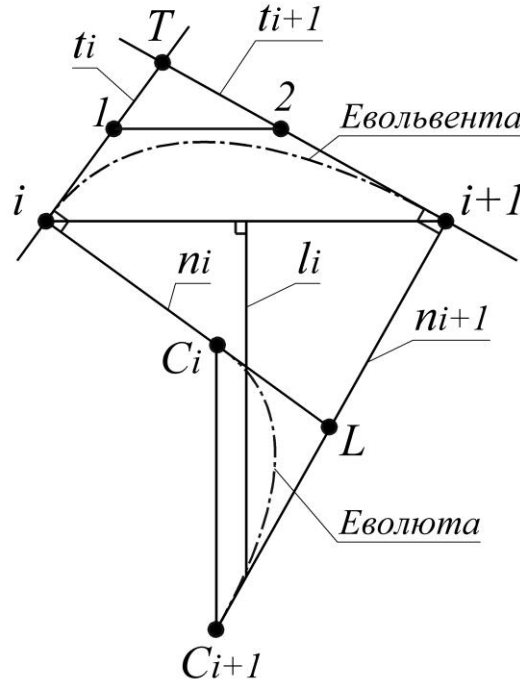


Рис. 1.

Таким чином, еволюта розташовується всередині трикутника $C_i; L; C_{i+1}$ та значення її довжини відповідає наступним умовам:

$$\Delta R > |C_i; C_{i+1}|; \quad (1)$$

$$\Delta R < |C_i; L| + |L; C_{i+1}|, \quad (2)$$

де $|C_i; C_{i+1}|$, $|C_i; L|$, $|L; C_{i+1}|$ – довжини сторін трикутника центрів кривини $C_i; L; C_{i+1}$.

Умову (2) можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} |C_{i+1}; i+1| - |C_i; i| &< |C_i; L| + |L; C_{i+1}|, \\ \text{або } |i; L| &> |L; i+1|. \end{aligned} \quad (3)$$

При такому розташуванні нормалей дотичні t_i , t_{i+1} та хорда $[i; i+1]$ визначають базисний трикутник $i; T; i+1$, співвідношення сторін якого відповідає умові:

$$|i; T| < |T; i+1|. \quad (4)$$

Зазначимо, що розташування нормалей та дотичних, при яких виконуються вимоги (3) та (4) відповідно, є необхідними умовами формування кривої з монотонним зростанням кривини на ділянці $(i \dots i+1)$.

При моделюванні обводу уздовж усього точкового ряду

положення дотичних у вихідних вузлах необхідно призначити таким чином, щоб умова (4) виконувалася для всіх ділянок кривої. Визначимо діапазон положення дотичної t_i .

Для цього на етапі аналізу вихідного точкового ряду через кожні три послідовні точки проводиться стичне коло. Нехай через точку i проходять кола $СК_{i-1}$, $СК_i$ та $СК_{i+1}$. Для того, щоб моделювати ДПК з монотонною зміною кривини, діапазоном можливого розташування дотичної t_i є кут, що обмежений дотичними до відповідних стичних кіл. Однією границею є дотична до $СК_i$ ($t_{СК_i}$), а другою – дотична, яка розташована ближче до $t_{СК_i}$: дотична до $СК_{i-1}$ або до $СК_{i+1}$ [1].

Після визначення діапазонів положень дотичних у всіх вузлах вихідного точкового ряду, із них обирається мінімальний. Положення дотичної до ДПК у точці, яка відповідає мінімальному діапазону, (наприклад, t_i) призначається по центру діапазону. Положення дотичних у попередньому та наступному вихідному вузлі (t_{i-1}, t_{i+1}) визначається з урахуванням положення дотичної t_i .

В результаті отримується ланцюг базисних трикутників, який забезпечує можливість моделювання обводу з монотонною зміною кривини уздовж усього точкового ряду. Дотичні до обводу у вихідних точках визначають положення граничних ланок багатокутника, що задає В-сплайн, який формує ділянку обводу. Положення середньої ланки [1...2] багатокутника, що задає В-сплайн (рис. 1), призначається виходячи зі значень кривини у граничних точках В-сплайну – i та $i+1$.

Діапазони радіусів кривини, які необхідно забезпечити при моделюванні обводу з монотонною зміною кривини визначають базисні трикутники, що обмежені вихідними вузлами.

Висновки. У роботі отримані наступні результати:

- визначено умову розташування дотичних (нормалей) у точках, що обмежують ділянку монотонної кривої. Критерієм є співвідношення сторін базисного трикутника або розташування точки перетину нормалей у вихідних вузлах;
- запропоновано спосіб призначення положень дотичних (нормалей) у вузлах кривої, при яких задача моделювання обводу із монотонною зміною кривини має розв'язок уздовж усього точкового ряду.

Отримані результати дають можливість визначити положення ланок багатокутника, що задає кубічний В-сплайн, що формує ділянку обводу з монотонною зміною кривини. У процесі подальших досліджень планується розробити алгоритм моделювання обводу з монотонною зміною кривини, у вихідних точках якого задано положення дотичних та значення радіусів кривини.

Література

1. Гавриленко Е.А. Дискретное интерполирование плоских одномерных обводов с закономерным изменением кривизны: дис. канд. техн. наук / Е.А. Гавриленко. – Мелітополь, 2004. – 182 с.
2. Гавриленко Є.А. Визначення діапазонів геометричних характеристик монотонної дискретно представленої кривої / Є.А. Гавриленко, Ю.В. Холодняк // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету «Прикладна геометрія та інженерна графіка». – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Вип. 4, т. 54. – С. 38–42.
3. Холодняк Ю.В. Формування ділянки дискретно представленої кривої із монотонною зміною кривини / Ю.В. Холодняк // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету «Прикладна геометрія та інженерна графіка». – Мелітополь: ТДАТУ, 2013. – Вип. 4, т. 57. – С. 211–216.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНТРОЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА, ЗАДАЮЩЕГО В-СПЛАЙН С МОНОТОННЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ КРИВИЗНЫ

Дубинина А.В., Гавриленко Е.А., Холодняк Ю.В.

В работе определены условия моделирования обводов участками кубического В-сплайна. Предложен способ назначения контрольных точек, которые задают В-сплайн с монотонным изменением кривизны. Определена схема назначения в исходных точках положений касательных и значений радиусов кривизны, при которых задача формирования обвода с монотонным изменением кривизны имеет решение.

Ключевые слова: неперриодический кубический В-сплайн, касательная, нормаль, базисный треугольник, радиус кривизны, монотонное изменение кривизны.

DETERMINATION OF CONTROL POLYGON WHICH SETS THE A B-SPLINE WITH MONOTONOUS CHANGE OF CURVATURE

Dybinina A., Gavrilenko E., Kholodnyak Yu.

The conditions modeling of contour by areas of a cubic B-spline is defined in this article. The method of assigning of control points that define the B-spline with monotonous change of curvature is proposed. The assignment scheme of positions of tangents and values of radiuses of curvature in the initial point which the task of forming a contour of with monotonous change of curvature has a solution is determined.

Keywords: non-periodic cubic B-spline, tangential, normal is, basic triangle, the radius of curvature, the monotonous change of curvature.