

УДК 514.18

## РУХ ЧАСТИНКИ ПО ШОРСТКІЙ ГОРИЗОНТАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ, ЯКА ЗДІЙСНЮЄ КОЛИВАННЯ У ВЕРТИКАЛЬНОМУ НАПРЯМКУ

Несвідомін В.М., д.т.н,

Пилипака С.Ф., д.т.н.

*Національний університет біоресурсів і природокористування України (Київ)*

*Розроблено імітаційну Maple-модель руху частинки по шорсткій горизонтальній площині, яка здійснює коливання у вертикальному напрямку, наведено її траєкторно-кінематичні характеристики.*

*Ключові слова: рух частинки, шорстка площина, коливальні переміщення, диференціальні рівняння, траєкторія, швидкість.*

**Постановка проблеми.** В с.-г. техніці, зокрема в зерноочисних машинах, має місце переміщення сипучих матеріалів по шорстких поверхнях, які здійснюють періодичні коливання в просторі [2]. Розробка імітаційних моделей руху частинки по шорстких коливальних поверхнях дозволяє цілеспрямовано провести аналіз конструктивно-кінематичних параметрів робочих органів, вибрати раціональні параметри технологічного процесу сепарації.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** В праці [3] показано використання супровідних тригранників траєкторії частинки для опису її руху частинки по довільній шорсткій поверхні. Розробку імітаційної моделі руху частинки виконаємо в системі комп'ютерної алгебри Maple, яка є одною із найпотужніших середовищ символічних перетворень [1].

**Формулювання цілей статті.** В середовищі Maple розробити імітаційну модель *PlaneOxyMove* руху частинки по горизонтальній шорсткій площині, яка здійснює коливання вздовж вертикальної осі та за її допомогою дослідити траєкторно-кінематичні властивості частинки в залежності від наступних вихідних умов: 1) амплітуди та частоти коливання; 2) початкової швидкості  $V_0$  частинки; 3) кута  $\alpha_0$  напрямку її кидання; 4) коефіцієнта зовнішнього тертя  $f$ .

**Основна частина.** Для формування системи диференціальних рівнянь 2-го порядку закону руху частинки по рухомій горизонтальній площині запишемо її параметричне рівняння у вигляді:

$$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{R}[u, v, 0], \quad (1)$$

де  $u \in [u_1..u_2]$ ,  $v \in [v_1..v_2]$  – внутрішні координати поверхні  $\mathbf{R}(u, v)$ .

Існує необмежена кількість можливих коливань горизонтальної площини. Дослідимо її гармонічне коливання вздовж осі  $Oz$  виду:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}[0, 0, l \sin(vt)], \quad (2)$$

де  $v$  - кутова швидкість ( $c^{-1}$ ) та  $l$  – амплітуда (м) коливання.

Тоді траєкторія площини  $\mathbf{R}(u, v)$  в просторі  $Oxyz$  буде:

$$\mathbf{H}(u, v, t) = \mathbf{R}[u, v, 0] + \mathbf{M}[0, 0, l \sin(vt)]. \quad (3)$$

Якщо у коливальній площині  $\mathbf{H}(u, v, t)$  кинути частинку, то вона буде здійснювати відносний рух  $\boldsymbol{\rho}(t)$  в площині і абсолютний рух  $\mathbf{r}(t)$  в просторі  $Oxyz$ . В проекціях на осі  $OT$  і  $OP$  супровідного тригранника Дарбу  $OTPN$  закон руху частинки запишеться у вигляді [3]:

$$\begin{cases} OT := m W_\tau = F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \boldsymbol{\tau}_\rho}) - f(F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \mathbf{N}}) \pm F_c \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{N}})) \\ OP := m W_n \sin(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{N}}) = F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \mathbf{P}}) \end{cases}, \quad (4)$$

де:  $\mathbf{G} = [0, 0, -1]$  - напрямок сили тяжіння  $F_g = mg$  в системі  $Oxyz$ ;

$W_\tau$  і  $W_n$  – величини тангенціального та нормального прискорення;

$F_g = mg$  і  $F_c = m V^2 k$  - сила тяжіння та відцентрова сила;

$\mathbf{N} = [0, 0, 1]$  - нормаль до площини  $\mathbf{R}(u, v)$  в точках траєкторії  $\mathbf{r}$ ;

$\mathbf{n}$  - головна нормаль абсолютної траєкторії  $\mathbf{r}$  частинки;

$\boldsymbol{\tau}_\rho$  - вектор дотичної відносної траєкторії  $\boldsymbol{\rho}$  частинки.

Подальші аналітичні викладки є настільки громіздкими, що привести їх тут не представляється можливим. Але в середовищі Maple [1] всі вони виконуються автоматично за допомогою розробленого програмного забезпечення. Коротко розкриємо результати досліджень.

Нехай маємо амплітуду коливання  $l = 2$ м площини, її частоту  $v = 1 c^{-1}$ , початкову швидкість кидання частинки  $V_0 = 8$ м/с, коефіцієнт зовнішнього тертя  $f = 0.3$  та кут напрямку кидання частинки  $\alpha_0 = -90^\circ, -45^\circ, 0^\circ, 45^\circ$ . На рис.1,а наведено початкове та крайні положення площини. Абсолютні траєкторії  $\mathbf{r}(t)$  частинки в залежності кута  $\alpha_0$  їх кидання на проміжку  $t = 2\pi$  с показано на рис.1, б, а на рис.1,в – їх відносні траєкторії  $\boldsymbol{\rho}(t)$ , які є прямими лініями. За графіками відносних  $V_\rho(t) \rightarrow 0$  швидкостей (рис.1,д) можна стверджувати, що всі частинки через проміжок часу  $t \approx 3$ с зупиняться. Значення абсолютних швидкостей  $V(t)$  переходять до синусоїдального закону. В момент зупинки частинок їх нормальна реакція  $F_N(t)$  наближається до значення  $mg$  (рис.1,е). Кожен із цих графіків не залежить від значення  $\alpha_0$  кута напрямку кидання частинки у горизонтальній площині. У найвищій точці траєкторії  $\mathbf{r}(t)$  частинки графік нормальної реакції  $F_N(t)$  приймає найменше значення  $F_N(t) \approx 1$ Н, що говорить про можливість відриву частинки від поверхні коливальної площини саме у верхньому її положенні. Нормальна реакція  $F_N(t)$  частинки у нижньому положенні коливальної площини є найбільшою  $\approx 17$ Н.

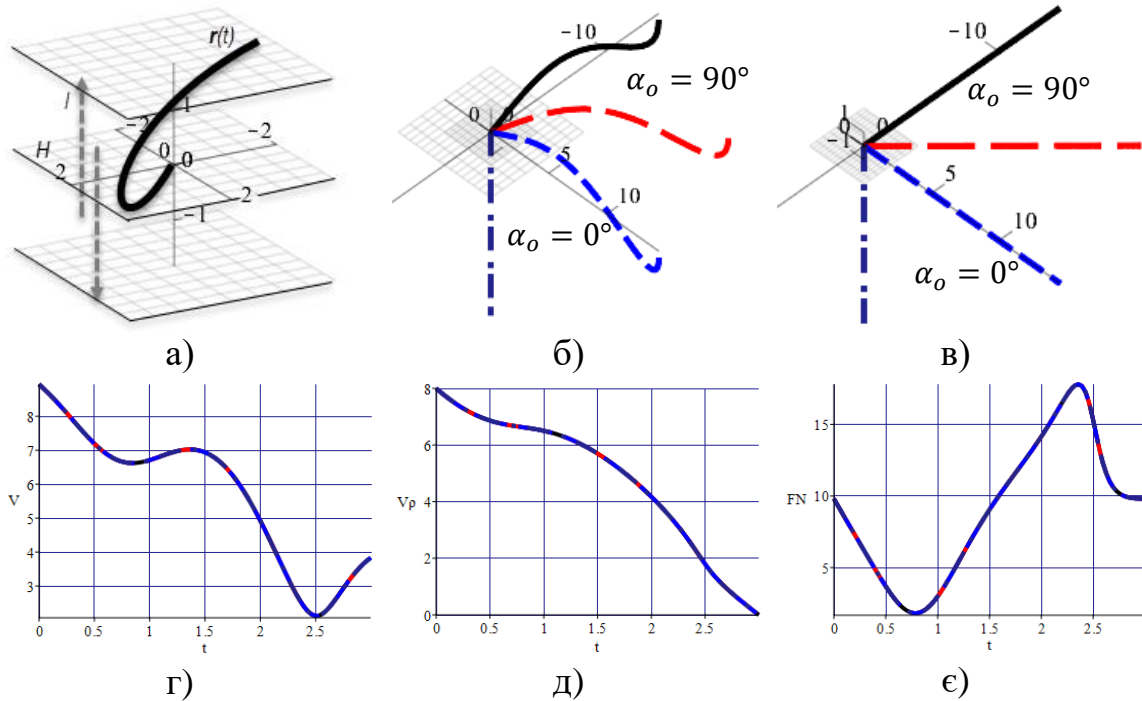


Рис.1. Рух частинки в залежності від кута кидання  $\alpha_0$

Нехай частинки з різним коефіцієнтом тертя  $f = 0.01, 0.15, 0.3, 0.45$  кинуті з однаковою початковою швидкістю  $V_0 = 8$  м/с в одному напрямку  $\alpha_0 = 0^\circ$  (рис.2). Чим менший коефіцієнт тертя ( $f = 0.01$ ) частинки, тим графік її абсолютної швидкості  $V(t)$  збігається із синусоїдою (рис.2,б), а графік відносної швидкості  $V_r(t)$  наближається до прямої (рис.2,в). Нахили цих графіків демонструють те, що всі частинки в шорсткій горизонтальній площині обов'язково зупиняться.

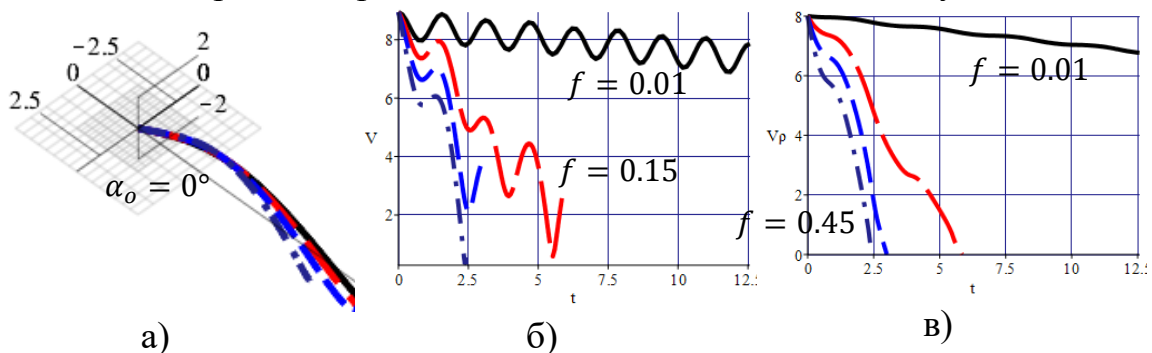


Рис.2. Абсолютні траєкторії та графіки абсолютної  $V(t)$  і відносної  $V_r(t)$  швидкостей частинки в залежності від коефіцієнта тертя  $f$

На рис.3 наведено рух частинок кинутих в одному напрямку  $\alpha_0 = 0^\circ$  та з однаковим коефіцієнтом тертя  $f = 0.3$ , але з різною початковою швидкістю  $V_0 = 1, 2, 4, 8$  м/с. Частинка з початковою швидкістю  $V_0 = 2$  вже зупиниться через проміжок часу  $t \cong 0.3$ с під час підйому площини (рис.3,б,в). Збільшення початкової швидкості у двічі не приводить до прямопропорційного збільшення часу  $t$  до повної зупинки частинки.

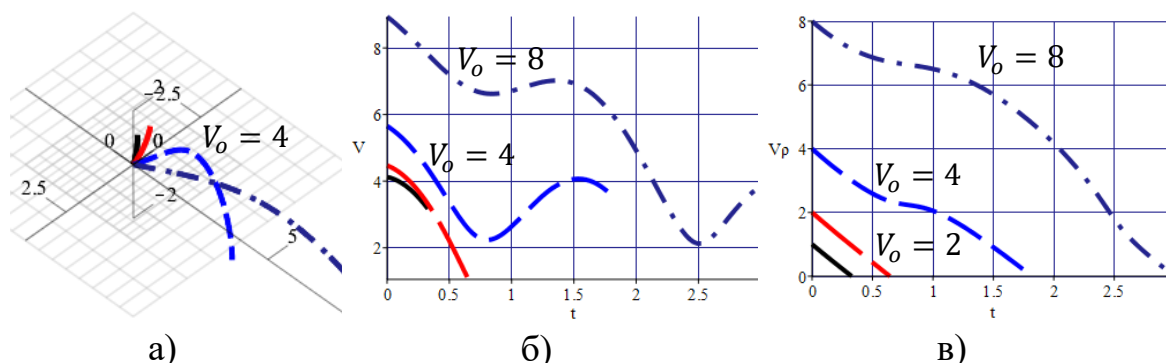


Рис.3. Абсолютні траєкторії та графіки абсолютної  $V(t)$  та відносної  $V_p(t)$  швидкостей частинки в залежності від її початкової швидкості

**Висновки.** Через те, що в шорсткій горизонтальній площині, яка здійснює коливання вздовж вертикальної осі, всі частинки будуть зупинятися, то сепарація сипучого матеріалу буде неефективною.

### Література

1. Аладьев В.З. Программирование и разработка приложений в Maple / В.З.Аладьев, В.К.Бойко, Е.А.Ровба. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 458 с.
2. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. – К.: УАСХН, 1960. – 283 с.
3. Пилипака С.Ф. Тригранник і формули Френе: теорія складного руху матеріальної точки та задачі на кінематику і динаміку при її русі по шорстких поверхнях / С.Ф. Пилипака // Академік П.М. Василенко – яскравий погляд у майбутнє. – К.: Хай-Тек Прес, 2010. – С.297-397.

## ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ ПО ШЕРОХОВАТОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ, КОТОРАЯ СОВЕРШАЕТ КОЛЕБАНИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Несвидомин В.Н., Пилипака С.Ф.

*Разработана имитационная Maple-модель движения частицы по шероховатой горизонтальной плоскости, которая совершает колебания по вертикальной оси, приведены ее характеристики.*

**Ключевые слова:** движение частицы, шероховатая плоскость, колебательные перемещения, траектория, скорость.

## THE MOTION OF A PARTICLE ON A ROUGH HORIZONTAL PLANE, WHICH OSCILLATES IN THE VERTICAL DIRECTION

Nesvidomin V., Pylypaka S.

*Maple developed a simulation model of movement of a particle on a rough horizontal plane, which oscillates in the vertical direction.*

**Key words:** motion of a particle, rough plane, vibrational displacement, differential equations, trajectory, speed.