

УДК 514.18

РУХ ЧАСТИНКИ ПО ШОРСТКІЙ ПОВЕРХНІ ЕЛІПСОЇДА ОБЕРТАННЯ

Пилипака С.Ф., д.т.н.,

Несвідомін А.В., к.т.н.

*Національний університет біоресурсів і природокористування України
(м. Київ)*

Наведено траєкторно-кінематичні властивості руху частинки по нерухомій шорсткій поверхні еліпсоїда обертання.

Ключові слова: шорстка поверхня, еліпсоїд обертання, рух частинки, диференціальні рівняння, траєкторія, швидкість.

Постановка проблеми. Обґрунтування конструктивних параметрів робочих поверхонь для переміщення або ж сепарування сипучого матеріалу передбачає дослідження руху окремої частинки по шорсткій поверхні [2]. Для еліпсоїда обертання подібні дослідження можна виконати тільки за допомогою сучасних комп'ютерних технологій.

Аналіз існуючих досліджень і публікацій. В праці [3] запропонований спосіб та аналітичний опис руху частинки по шорсткій поверхні на основі використання супровідних тригранників траєкторії.

Формулювання цілей статті. Розробити для середовища Maple [1] імітаційну модель руху частинки по шорсткій поверхні еліпсоїда обертання та дослідити траєкторно-кінематичні властивості в залежності від наступних вихідних умов: 1) параметрів форми та положення поверхні; 2) початкової швидкості кидання частинки; 3) кута напрямку її кидання в дотичній площині; 4) коефіцієнта тертя.

Основна частина. В проекціях на орти u і v тригранника $OuvN$ закон руху частинки запишеться [3]:

$$\begin{cases} Ou := m W \cos(\widehat{R_u, w}) = F_g \cos(\widehat{R_u, G}) - f F_N \cos(\widehat{R_u, \tau}) \\ Ov := m W \cos(\widehat{R_v, w}) = F_g \cos(\widehat{R_v, G}) - f F_N \cos(\widehat{R_v, \tau}) \end{cases} \quad (1)$$

де: $G = [0, 0, -1]$ - напрямок сили тяжіння системи $Oxyz$;

$W = |w|$ - величина прискорення;

$F_N = F_g \cos(\widehat{N, G}) \pm F_c \cos(\widehat{N, n})$ - сила нормальної реакції;

$F_g = mg$ і $F_c = mV^2k$ - сила тяжіння і відцентрова сила;

$N = [0, 0, 1]$ - нормаль до площини $R(u, v)$ в точках траєкторії r ;

n і τ - головна нормаль та дотична до траєкторії r частинки.

Параметричне рівняння uv -координатної сітки еліпсоїда обертання з віссю в площині Ouz системи координат $Oxyz$ запишемо у

вигляді:

$$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{R} \begin{bmatrix} a \cos(u) \cos(v) \\ a \sin(u) \cos(v) \cos(\xi) - b \sin(v) \sin(\xi) \\ a \sin(u) \cos(v) \sin(\xi) + b \sin(v) \cos(\xi) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

Де a, b – параметри форми еліпса в площині Oxz ;

ξ – кут між віссю обертання еліпса та віссю Oz в площині Oyz ;

$u \in [0; 2\pi], v \in [-\pi/2; \pi/2]$ – криволінійні координати поверхні.

Врахування кута ξ суттєво впливає на траєкторно-кінематичні властивості руху частинки по шорсткій поверхні еліпсоїда обертання, які виражаються вкрай громіздкими аналітичними рівняннями. Для розробленої *maple*-моделі *Ellipsoid_t* складність їх виведення немає значення, оскільки в середовищі символічної алгебри *Maple*[1] вони здійснюються автоматично. Для випадку коли положення осі обертання еліпса збігається з віссю Oz ($\xi = 0$) параметричне рівняння uv -сітки еліпсоїда обертання (2) з віссю Oz вже матиме вигляд:

$$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{R}[a \cos(u) \cos(v), a \sin(u) \cos(v), b \sin(v)], \quad (3)$$

закон руху частинки по якому буде виражатися децю простішою системою диференціальних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} Ou := -ma \left(2 \sin(v(t)) \frac{d}{dt} u(t) \frac{d}{dt} v(t) - \cos(v(t)) \frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) = \\ \frac{mf a^2 \cos(v(t)) \frac{d}{dt} u(t) \left(b \left(\left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + \cos(v(t))^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \right) + g \sin(v(t)) \right)}{v \sqrt{(b^2 - a^2) \cos(v(t))^2 + a^2}} \\ Ov := ma \left(\left((b^2 - a^2) \cos(v(t))^2 + a^2 \right) \frac{d^2}{dt^2} v(t) + \sin(v(t)) \cos(v(t)) \left((a^2 - b^2) \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + a^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \right) \right) = \\ \frac{amf \frac{d}{dt} v(t) \left((a^2 - b^2) \cos(v(t))^2 - a^2 \right) \left(-b \cos(v(t))^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 - b \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + g \sin(v(t)) \right)}{v \sqrt{(b^2 - a^2) \cos(v(t))^2 + a^2}} - b mg \cos(v(t)). \end{array} \right. \quad (4)$$

Початкові умови рішення системи диференціальних рівнянь (4) є:

$$O_i := u(0) = u_o, \frac{d}{dt} u(0) = \frac{V_o \sin(\alpha_o)}{a \cos(v_o)}, v(0) = v_o, \frac{d}{dt} v(0) = \frac{V_o \cos(\alpha_o)}{\sqrt{(b^2 - a^2) \cos(v_o)^2 + a^2}}, \quad (4)$$

де α_o – кут між вектором швидкості $\mathbf{V}(t)$ і u -координатними лініями;

$[u_o, v_o]$ – її положення в момент $t_o = 0$.

Шукані залежності $u(t)$ і $v(t)$ із рівнянь (4)-(5) можна знайти тільки наближено, зокрема за методом Рунге-Кутта у дискретному вигляді [1]. На рис.1 наведено траєкторії $\mathbf{r}(t)$ частинки, графіки її швидкості $V(t)$ та кривини $k(t)$ траєкторії по внутрішній поверхні еліпсоїда обертання з параметрами форми $a = 4, b = 2$ в залежності від кута кидання $\alpha_o = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$, початковим положенням $u_o = \pi, v_o = \pi/6$, початковій швидкості $V_o = 4$ м/с та коефіцієнтом тертя $f = 0.3$. За графіками швидкостей $V(t)$ можна стверджувати, що всі частинки

через різні проміжки часу зупиняться в околі найнижчої точки (полюса) еліпсоїда. Причому, частинка кинута в сторону і донизу еліпсоїда ($\alpha_0 = 135^\circ$) зупиниться найшвидше $t \approx 2.1c$. В момент зупинки частинки кривина $k(t)$ її траєкторії наближається до нуля.

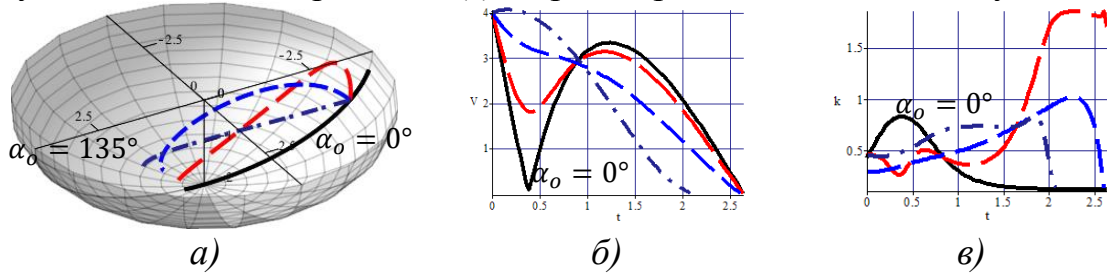


Рис.1. Траєкторії $r(t)$ частинки, графіки її швидкості $V(t)$ та кривини $k(t)$ в залежності кута α_0 її кидання

Траєкторії $r(t)$ частинки та графіки її швидкості $V(t)$ в залежності від: а) коефіцієнта тертя $f = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ та $\alpha_0 = 90^\circ$ і $V_0 = 4$ м/с; б) початкової швидкості $V_0 = 0.1, 2, 4, 6$ та $\alpha_0 = 90^\circ$ і $f = 0.3$; в) початкового положення $v_0 = 195^\circ, 215^\circ, 235^\circ, 255^\circ$ та $\alpha_0 = 90^\circ$ і $V_0 = 4$ побудовано на рис.2. Чим більший коефіцієнт тертя f , тим швидше частинка зупиниться. Місце зупинки частинки знаходиться в околі нижнього полюса еліпсоїда. Кинуті частинки із початковими швидкостями $V_0 = 0.1$ і $V_0 = 2$ м/с відповідно під кутами $\alpha_0 = 0^\circ$ і $\alpha_0 = 45^\circ$ хоча мають різні траєкторії, але зупиняються через однаковий проміжок часу $t \approx 2.2c$. Частинки кинуті з різних паралелей $v_0 = 195^\circ, 215^\circ, 235^\circ$ еліпсоїда зупиняться майже одночасно $t \approx 2.5c$.

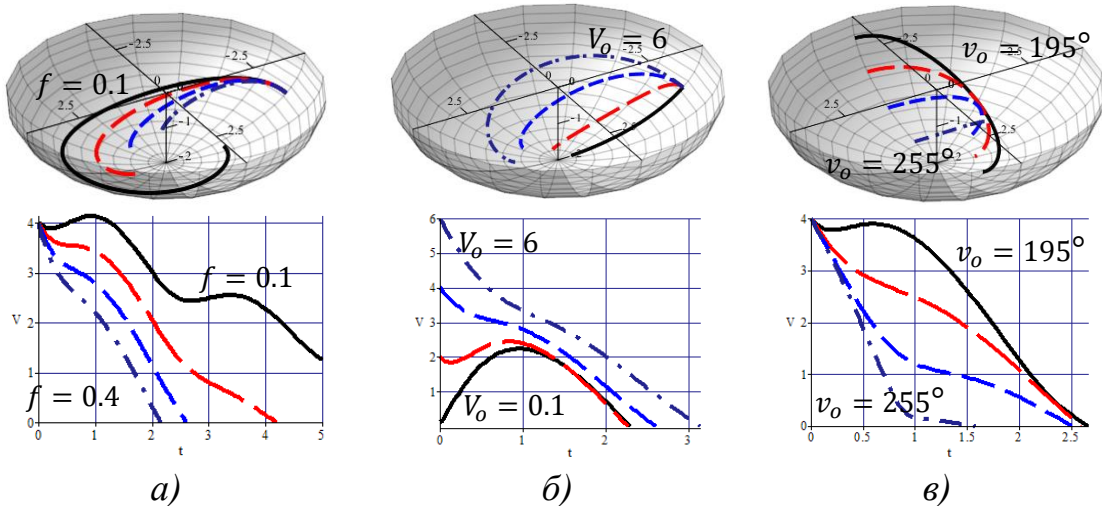


Рис.2. Траєкторії $r(t)$ частинки та графіки її швидкості $V(t)$ по внутрішній поверхні еліпсоїда за різних умовах її кидання

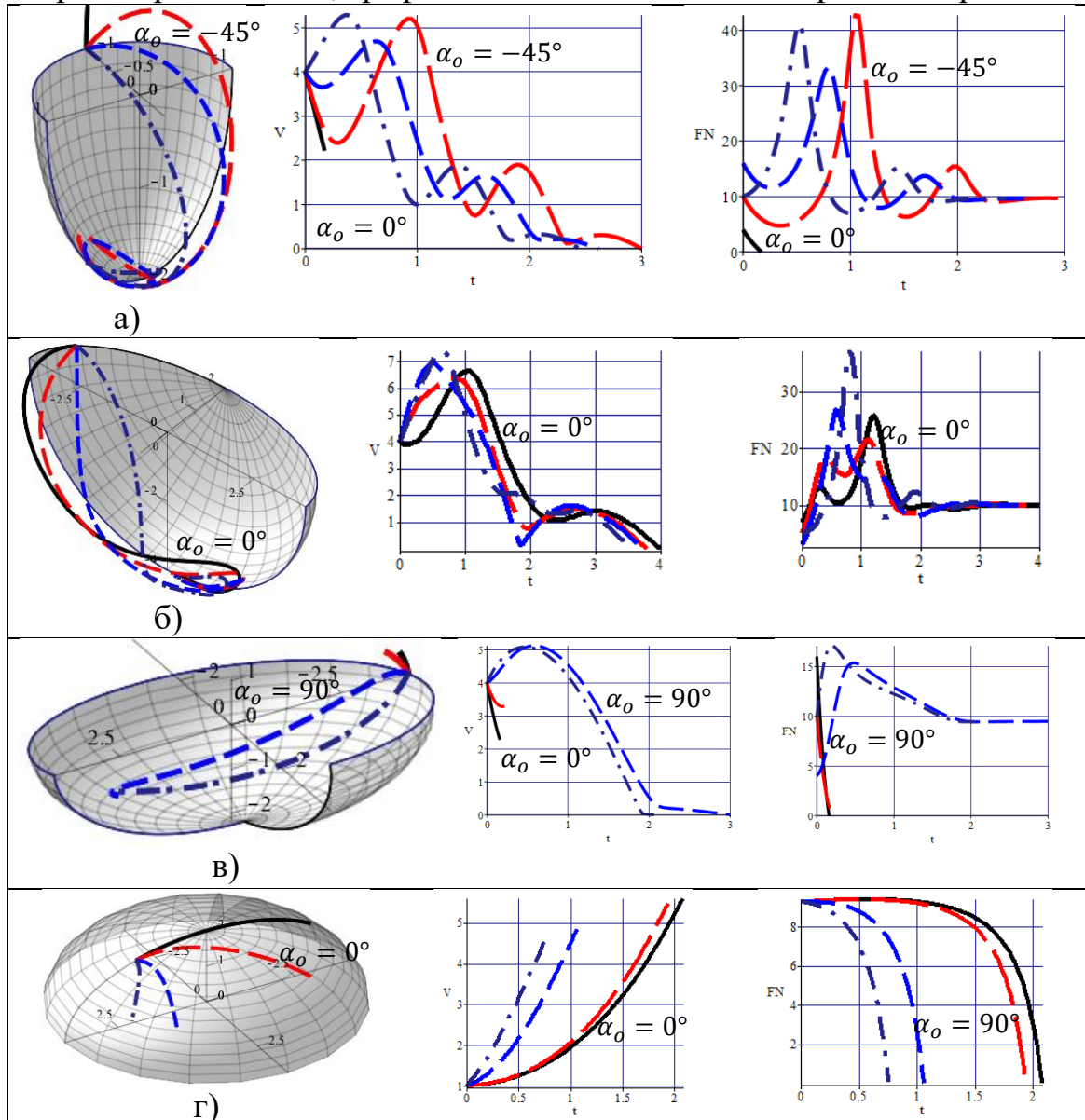
Нехай параметри форми еліпсоїда дорівнюють $a = 1$ і $b = 2$, кут кидання $\alpha_0 = 0^\circ, -45^\circ, -90^\circ, -135^\circ$, початкове положення $u_0 = 3\pi/2$, $v_0 = 0$, початкова швидкість $V_0 = 4$ м/с, коефіцієнт тертя $f = 0.3$ (в табл.1, а показано 1/8 частину поверхні). Частинка кинута вгору вздовж меридіана ($\alpha_0 = 0^\circ$) через проміжок часу $t \approx 0.2c$ відірветься від

поверхні. Всі інші частинки не відриваючись від поверхні будуть рухатися до нижнього полюса еліпсоїда, в околі якого зупиняться.

Дещо інший характер руху частинки відбудеться по поверхні еліпсоїдаобертання, коли його вісь займає горизонтальнеположення. Траєкторії $r(t)$ та графіки її швидкості $V(t)$ частинки в залежності від кута кидання $\alpha_o = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ при початковому положенні $u_o = \pi, v_o = -\pi/6$, початкової швидкості $V_o = 4$ м/ста коефіцієнта тертя $f = 0.3$ наведено в табл.1,б. За цих вихідних умов всі частинки в замкнутому просторі еліпсоїда обертання зупиняться внизу – за графіками швидкостей $V(t)$ це почне відбуватися через проміжок часу $t \approx 3.5$. В момент їх зупинки нормальна реакція $F_N(t)$ наближається до значення $F_N = mg$. Частинка кинута в сторону полюса еліпсоїда на початку руху має більшу амплітуду сили нормальної реакції $F_N(t)$ за рахунок більшої швидкості $V(t)$ та меншої кривини $k(t)$ траєкторії.

Таблиця 1

Траєкторії частинки, графіки її швидкості та сили нормальної реакції



Якщо повернути вертикальну вісь еліпсоїда обертання (1) навколо осі Ox на кут $\xi = 15^\circ$, то траєкторії $r(t)$ частинки в середині поверхні не будуть йти в напрямку нижнього полюса (табл.1,в). Графіки швидкості $V(t)$ та сили нормальної реакції $F_N(t)$ частинки в залежності від кута кидання $\alpha_0 = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ при $u_0 = \pi, v_0 = 0, V_0 = 4$ м/с та $f = 0.3$ показують, що тільки частинки з кутом кидання $\alpha_0 = 90^\circ, 135^\circ$ не відірвуться від поверхні.

Один із результатів руху частинки по зовнішній поверхні еліпсоїда обертання наведено в табл.1,в. Можна бачити, що всі частинки з кутами кидання $\alpha_0 = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ при $f = 0.3$ і $V_0 = 1$ м/с відірвуться від поверхні не доходячи до її екватора.

Висновки. Параметри форми та положення еліпсоїда обертання, початкової швидкості, положення коефіцієнта тертя частинки мають комплексну дію на переміщення сипучого матеріалу по поверхні.

Література

1. Аладьев В.З. Программирование и разработка приложений в Maple / В.З.Аладьев, В.К.Бойко, Е.А.Ровба. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 458 с.
2. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. – К.: УАСХН, 1960. – 283 с.
3. Несвідомін А.В. Комп'ютерне моделювання руху частинки по нерухомих шорстких поверхнях в проєкціях на орти супровідного тригранника траєкторії: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 05.01.01 "Прикладна геометрія та інженерна графіка/ А.В.Несвідомін. – К., 2016. – 24 с.

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЧКИ ПО ШЕРОХОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЕЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

Пилипака С.Ф., Несвидомин А.В.

Приведены траекторно-кинематические свойства движения частицы по шероховатой поверхности эллипсоида вращения.

Ключевые слова: шероховатая поверхность, эллипсоид вращения, движение частицы, траектория, скорость.

THE MOVEMENT OF PARTICLE ON A ROUGH SURFACE ELLIPSOID ROTATION

Pylypaka S., Nesvidomin A.

Given the trajectory and kinematic properties of the motion of a particle on a rough surface of an ellipsoid of rotation.

Keywords: rough surface, ellipsoid of rotation, the motion of particles, differential equations, trajectory, speed.