

УДК 514.18

КОМПОЗИЦІЙНИЙ МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ: СУТЬ, ОСОБЛИВОСТІ ТА ПЕРСПЕКТИВИ ЗАСТОСУВАННЯ

Адоньєв Є.О.

*Мелітопольська школа прикладної геометрії
Запорізький національний університет (Україна)*

У статті досліджені особливості композиційного методу геометричного моделювання, розробленого на основі точкового БН-числення, показані принципи побудови параболічних поверхонь відгуку (Б-поверхонь), а також алгоритм узагальнення вихідних факторів моделі. Показані властивості Б-поверхонь, які дозволяють ефективно використовувати останні для моделювання багатофакторних процесів.

Ключові слова: точкове БН-числення, багатофакторний, композиційний метод моделювання, Б-поверхня, параболічна поверхня.

Постановка проблеми. У моделюванні процесів, зокрема, у сфері енергоефективності, часто виникає проблема поєднання великої кількості фізично різнорідних факторів. Традиційні методи моделювання процесів та дослідження явищ є комбінаційними. Їхні складові, зазвичай, є взаємно залежними, при цьому, застосовуються різні підходи для знаходження кореляцій між ними.

Наявність взаємної залежності між елементами моделі на початковому етапі моделювання, завжди висуває до неї певні обмеження за кількістю факторів, за розмірами матриць, тощо. Крім того, необхідність інтеграції фізично різнорідних факторів додатково ускладнює моделювання, може збільшувати похибки, що тягне за собою прийняття помилкових рішень.

Для підвищення адекватності моделі розробляються різні способи виявлення головних факторів, компонентів геометричного характеру, що надає певні покращення моделі, однак, при цьому, не знімається обмеження з кількості вихідних факторів, що характеризують процес. Тому актуальною є проблема розробки методу моделювання, який мав би можливість, при створенні моделі, включати максимально необхідну кількість різнорідних факторів досліджуваного процесу.

На нашу думку, розв'язання проблеми інтеграції різнорідних факторів та збільшення можливої вихідної інформації у моделюванні

криється у розробці композиційних моделей, у яких не існує взаємно обумовленого зв'язку між її елементами.

Під композицією, у нашому випадку, треба розуміти структуру некорельованих різнорідних елементів, поєднаних у одній сукупності, з метою отримання бажаного. При цьому, заміна (зміна) будь-якого елемента композиції не тягне за собою зміни інших її елементів. Ця особливість композиційного методу геометричного моделювання є важливою, тому що на практиці, з метою побудови адекватної моделі, часто виникає необхідність змінювати якісно і кількісно вихідні фактори. Таким чином, розробка композиційного методу геометричного моделювання є актуальною через можливість необмеженого збільшення кількості вихідних факторів та їхньої заміни, у процесі моделювання, без зміни моделі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Ідея розробки композиційних методів моделювання поверхонь виникла на основі досліджень точкового числення Балюби-Найдиша.

Математичний апарат точкового БН-числення, зокрема, побудова параболічних поверхонь відгуку, став підґрунтям для розробки композиційного методу моделювання, який запропоновано у роботі.

Окремі питання, які є складовими композиційного методу, були розглянуті у роботах [1,7,8]. У цій роботі найбільш повно викладені дослідження щодо розробки композиційного методу, які є актуальними і оригінальними.

Формування цілей статті. Означити основи розробки композиційного методу геометричного моделювання у термінах точкового числення Балюби-Найдиша, показати його переваги та визначити перспективи застосування.

Основна частина. У роботах [1,2] було надано геометричний алгоритм отримання точкового рівняння дуги параболи другого порядку. Але для повноти викладання, наведемо цей алгоритм.

Відомо [4], що у загальному випадку криві другого порядку однозначно визначаються п'ятьма точками, однак через те, що у параболи інваріант D , який є мінором A_{33} , дорівнює нулю, то один з коренів характеристичного рівняння дорівнює нулю, що зменшує для параболи кількість точок з п'яти до чотирьох, які необхідні для однозначного її визначення. При цьому, три з них дійсні, а одна невласна.

Нехай точки A, B, C, C_∞ (рис. 1) визначають параболу, серед яких C_∞ є невласною і визначає напрям її гілок.

У відповідності до [2], невласну точку C_∞ (рис. 1) визначимо як напрям прямої CT_C . Точка C є вихідною, а точку T_C , згідно [1, 3], визначимо точковим рівнянням:

Звідкіля, враховуючи (1), (2), (3), (5), дістанемо точкове рівняння параболи другого порядку:

$$M = A \frac{\bar{t}(t_c - t)}{t_c} + B \frac{t(t_c - \bar{t})}{t_c} + C \frac{t\bar{t}}{t_c t_c}. \quad (7)$$

Застосовуючи розглянутий вище алгоритм три рази у напрямку параметру u та три рази у напрямку параметру v (рис. 2), (на рис. 2 з метою меншого графічного навантаження, показано побудови двох парабол у напрямку u та двох парабол у напрямку v), дістанемо параболічну Б-поверхню (Балюби поверхню), що подана дискретно у вигляді окремих шести ребер, які є параболами, рівняння яких подано у точковій формі (7) у загальному вигляді.

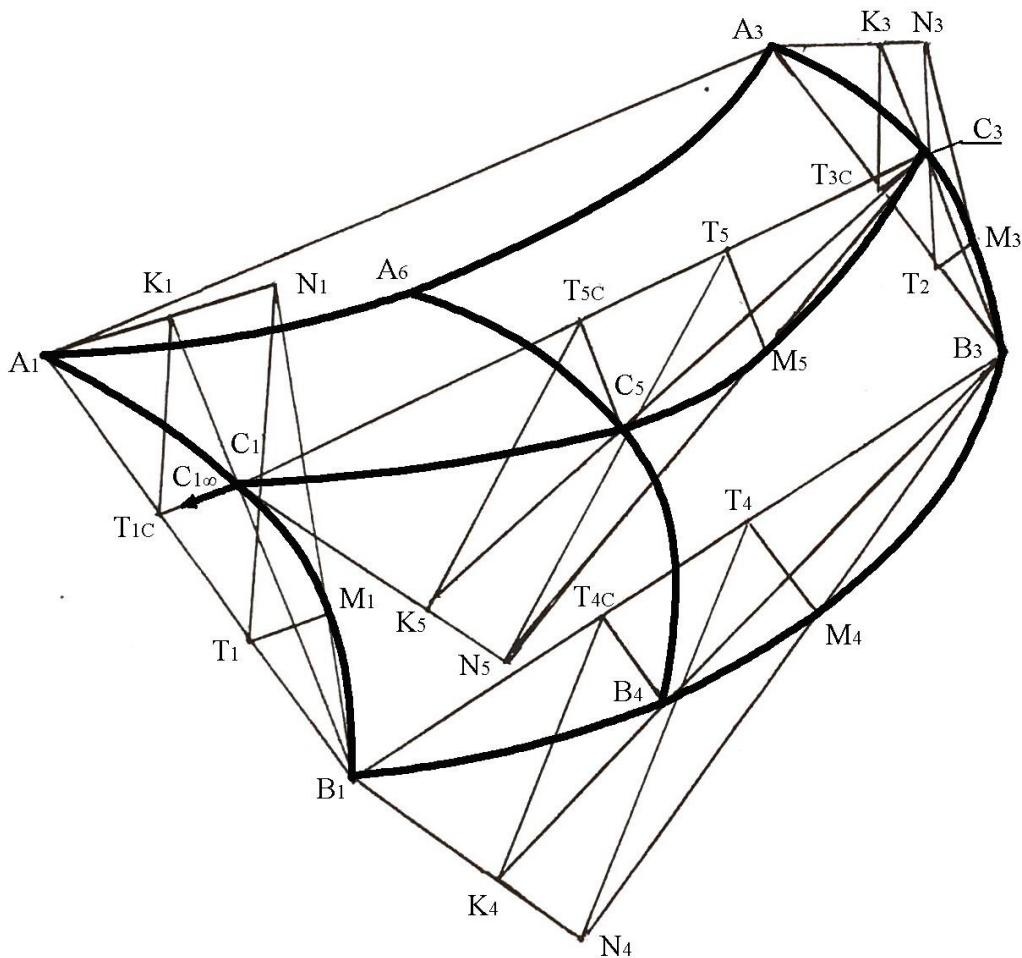


Рис. 2. Геометрична схема утворення Б-поверхні

Запишемо ці шість точкових рівнянь у відповідності до позначень, прийнятих на рис. 2 у напрямку u :

$$M_1 = A_1 p_1 + B_1 q_1 + C_1 r_1, \text{ де } p_1 = \frac{\bar{u}(u_c - u)}{u_c}; \quad q_1 = \frac{u\bar{u}}{u_c u_c}; \quad r_1 = \frac{u(u - u_c)}{u_c}; \quad (8)$$

де u – параметр уздовж Б-кривої, $u = \bar{0},1$;

$\bar{u} = 1 - u$ – параметр, що доповнює u до одиниці;

u_c - параметр, що визначає напрям гілок параболи;

$\bar{u}_c = 1 - u_c$ - параметр, що доповнює u_c до одиниці.

$$M_2 = A_2 p_1 + B_2 q_1 + C_2 r_1, \quad M_3 = A_3 p_1 + B_3 q_1 + C_3 r_1, \quad (9)$$

і у напрямку v :

$$N_1 = A_1 p_2 + A_2 q_2 + A_3 r_2, \quad \text{де } p_2 = \frac{\bar{v}(v_c - v)}{v_c}; \quad q_2 = \frac{\bar{v}\bar{v}}{v_c v_c}; \quad r_2 = \frac{v(v - v_c)}{v_c}; \quad (10)$$

де v – параметр уздовж Б-кривої поперечного напрямку, $v = \bar{0,1}$;

$\bar{v} = 1 - v$ - параметр, що доповнює v до одиниці;

v_c - параметр, що визначає напрям гілок параболи;

$\bar{v}_c = 1 - v_c$ - параметр, що доповнює v_c до одиниці.

$$N_2 = B_1 p_2 + B_2 q_2 + B_3 r_2, \quad N_3 = C_1 p_2 + C_2 q_2 + C_3 r_2. \quad (11)$$

Якщо у точкове рівняння M_1 (8) замість точок A_1, B_1, C_1 підставити, відповідно, точкові рівняння N_1 з (10) та N_2 і N_3 з (11), що дозволяє метод рухомого симплексу [7], то отримаємо точкове рівняння сегменту емпіричної поверхні (рис. 3). Ця поверхня може бути дискретною у разі дискретного подання параметрів u та v , або континуальною у разі неперервності u та v .

Якщо ввести узагальнюючі позначення: $A_1=x_{11}, B_1=x_{12}, C_1=x_{13}, A_2=x_{21}, B_2=x_{22}, C_2=x_{23}, A_3=x_{31}, B_3=x_{32}, C_3=x_{33}$, то точкове рівняння сегменту Б-поверхні матиме вигляд:

$$M = x_{11}a_{11} + x_{21}a_{21} + x_{31}a_{31} + x_{12}a_{12} + x_{22}a_{22} + x_{32}a_{32} + x_{13}a_{13} + x_{23}a_{23} + x_{33}a_{33}, \quad (12)$$

$$\text{де } a_{11} = \frac{\bar{v}(v_c - v)}{v_c} \cdot \frac{\bar{u}(u_c - u)}{u_c}; \quad a_{21} = \frac{\bar{v}\bar{v}}{v_c v_c} \cdot \frac{\bar{u}(u_c - u)}{u_c}; \quad a_{31} = \frac{v(v - v_c)}{v_c} \cdot \frac{\bar{u}(u_c - u)}{u_c};$$

$$a_{12} = \frac{\bar{v}(v_c - v)}{v_c} \cdot \frac{\bar{u}\bar{u}}{u_c u_c}; \quad a_{22} = \frac{\bar{v}\bar{v}}{v_c v_c} \cdot \frac{\bar{u}\bar{u}}{u_c u_c}; \quad a_{32} = \frac{v(v - v_c)}{v_c} \cdot \frac{\bar{u}\bar{u}}{u_c u_c}; \quad (13)$$

$$a_{13} = \frac{\bar{v}(v_c - v)}{v_c} \cdot \frac{u(u - u_c)}{\bar{u}_c}; \quad a_{23} = \frac{\bar{v}\bar{v}}{v_c v_c} \cdot \frac{u(u - u_c)}{\bar{u}_c}; \quad a_{33} = \frac{v(v - v_c)}{v_c} \cdot \frac{u(u - u_c)}{\bar{u}_c}.$$

Або у іншому запису

$$M = \sum_{i,j=1}^3 x_{ij} a_{ij}. \quad (14)$$

У такій формі запису, у подальших дослідженнях, будемо використовувати Б-поверхню для подання окремих факторів багатofакторних процесів або ситуацій.

Якщо схему (рис. 3), що подає сегмент Б-поверхні (12), умовно позначити колом Q_{ij} , а на певному технологічному рівні таких поверхонь буде три, на кожній з яких, за певним технологічним

критерієм, визначити оптимальні точки Q_{11} , Q_{12} , Q_{13} , а потім ці точки інтерполювати за допомогою (7), дістанемо Б-криву (рис. 4).

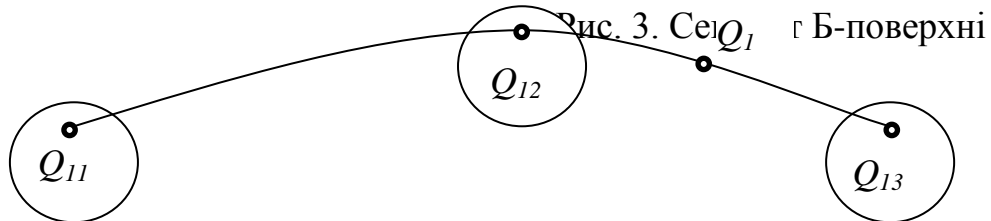
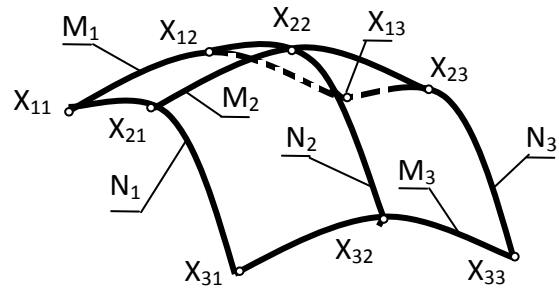


Рис. 4. Приклад об'єднання факторів на першому рівні

Однак, в залежності від складності технологічного процесу, можуть виникнути узагальнення факторів наступного (графічного) вигляду (рис.5).

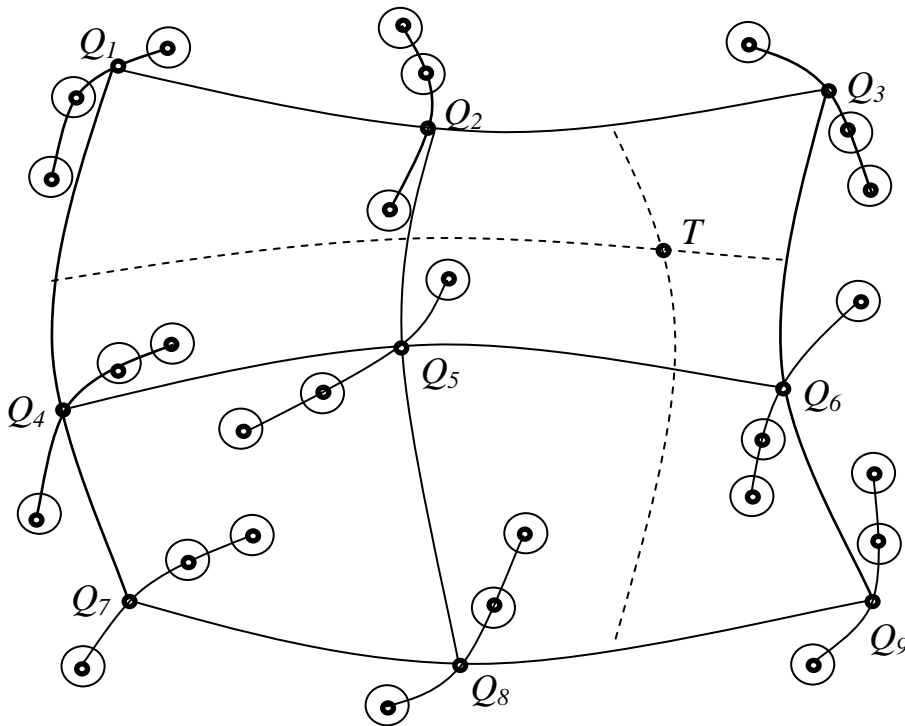


Рис. 5. Другий крок узагальнення факторів

Схема (рис. 5) може стати елементом для наступного узагальнюючого кроку для факторів (рис. 6).

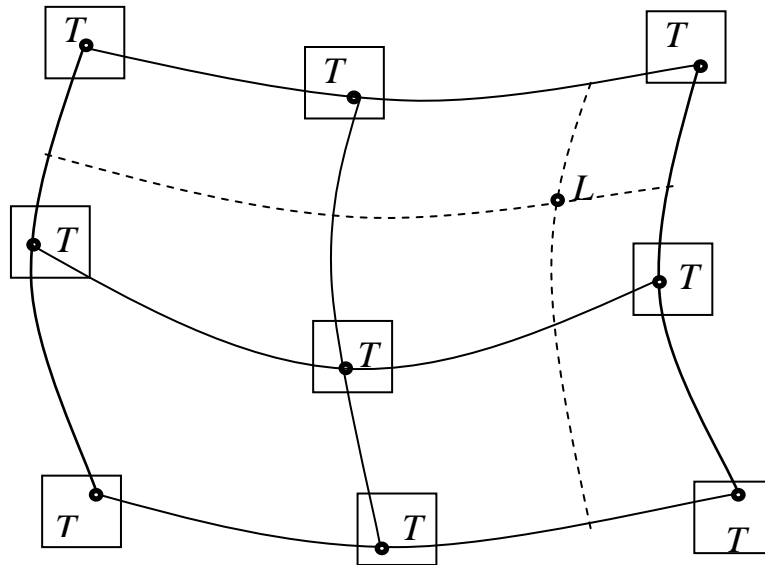


Рис. 6. Третій крок узагальнення факторів

Якщо на Б-поверхні (рис. 6) визначити точку L , то можна здійснити наступний – четвертий крок узагальнення факторів (рис. 7), для якого геометрична схема (рис. 6) є елементом.

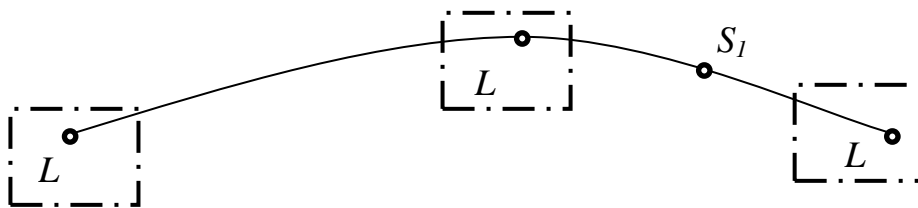


Рис. 7. Четвертий крок узагальнення факторів

Наявність оптимальної точки S_i (рис. 7), дозволяє зробити наступні кроки узагальнення. І так далі. Кількість факторів, які можуть бути задіяні у побудові моделі, також не обмежується.

Наведена вище техніка узагальнення факторів, окрім того, що не має обмежень по кількості однорідних факторів, вона дозволяє ще й узагальнювати різнорідні фактори.

Тут було показано техніку узагальнення факторів для створення моделей процесів та ситуацій для парабол другого порядку, визначення яких потребувало трьох дійсних точок, а Б-поверхня будувалась на дев'яти точках, однак, у роботі [1] вказується на те, що така техніка діє і для узагальнення факторів за допомогою сегментів Б-поверхонь, побудованих на дванадцяти (3×4 ; 4×3), шістнадцяти (4×4), двадцяти (4×5 ; 5×4) і т.д. точках.

З метою дослідження Б-функцій a_{ij} розрахуємо їхні значення для

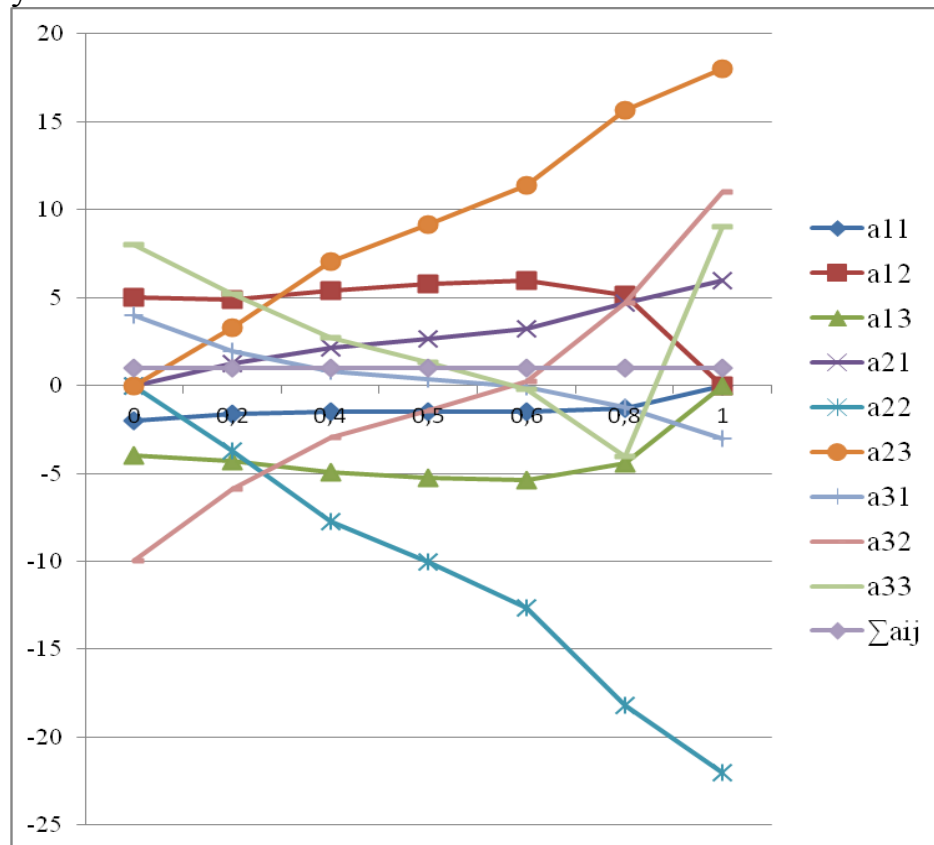
параметрів $u:v = 0, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0$ і наведемо результати розрахунків у табл.1.

Таблиця 1

Результати розрахунків Б-функцій a_{ij}

a_{ij}	u, v						
	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1
a_{11}	-2	- 1,59744	- 1,48608	-1,5	-1,52192	-1,33056	0
a_{12}	5	4,87424	5,40768	5,75	5,97632	5,14976	0
a_{13}	-4	-4,3008	-4,9536	-5,25	-5,3824	-4,4352	0
a_{21}	0	1,22304	2,11968	2,625	3,22752	4,70016	6
a_{22}	0	- 3,73184	- 7,71328	- 10,0625	- 12,67392	- 18,19136	- 22
a_{23}	0	3,2928	7,0656	9,1875	11,4144	15,6672	18
a_{31}	4	1,9344	0,8064	0,375	-0,0656	-1,2096	-3
a_{32}	-10	-5,9024	-2,9344	-1,4375	0,2576	4,6816	11
a_{33}	8	5,208	2,688	1,3125	-0,232	-4,032	9
$\sum a_{ij}$	1	1	1	1	1	1	1

Покажемо графічно (рис. 4) результати розрахунків a_{ij} , що наведені у табл. 1.

Рис. 4. Графіки Б-функцій a_{ij}

Як бачимо, суперпозиція $\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}$ для усіх значень параметрів u, v , які прийнято у табл. 1, дорівнює одиниці (останній рядок табл. 1).

Чому при будь-яких значеннях p_1, q_1, p_2, q_2 суперпозиція Б-функцій a_{ij} буде дорівнювати одиниці? Виходячи з теорії точкового БН-числення [2], точкові рівняння для усіх геометричних фігур мають область значень $0 \leq t \leq 1$. Тому, якщо параметри p_i, q_i можемо обирати довільно, то третій параметр r_i необхідно обирати за умови $p_i + q_i + r_i = 1$. Якщо врахувати це, то маємо:

$$\begin{vmatrix} p_1 p_2 & r_1 p_2 & q_1 p_2 \\ p_1 r_2 & r_1 r_2 & q_1 r_2 \\ p_1 q_2 & r_1 q_2 & q_1 q_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Розглянемо окремо кожний рядок матриці (15). Кожен з них дорівнює добутку одиниці на відповідний параметр p_2, r_2, q_2 :

$$\begin{aligned} (p_1 + q_1 + r_1)p_2 &= 1 \cdot p_2; \\ (p_1 + q_1 + r_1)r_2 &= 1 \cdot r_2; \\ (p_1 + q_1 + r_1)q_2 &= 1 \cdot q_2. \end{aligned}$$

Враховуючи, що $p_2 + r_2 + q_2 = 1$, маємо: $1 \cdot p_2 + 1 \cdot r_2 + 1 \cdot q_2 = p_2 + r_2 + q_2 = 1$, звідки суперпозиція $\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} = 1$.

Твердження 1. *Суперпозиція функцій-параметрів a_{ij} у будь-якої Б-поверхні завжди дорівнює одиниці.*

Наявність такої ознаки Б-поверхонь вказує на те, що параметри p_1, q_1 першого напрямку u на цій поверхні можуть бути обрані довільно, але вибір r_1 потрібно робити, дотримуючись певної функціональної залежності.

Для другого напрямку параболічної поверхні – v параметри p_2, q_2 також обираються довільно, а параметр r_2 є взаємно зумовленим з параметрами p_2 та q_2 (тобто їхньою комбінацією).

Розглянемо другу властивість Б-поверхонь. Якщо визначити відношення першого рядка до другого матриці (15), то отримаємо матрицю-рядок:

$$\left\{ \frac{p_1 p_2}{p_1 r_2} \quad \frac{r_1 p_2}{r_1 r_2} \quad \frac{q_1 p_2}{q_1 r_2} \right\} = \left\{ 1 \quad 1 \quad 1 \right\} \frac{p_2}{r_2}. \quad (16)$$

Отриманий результат з (16) свідчить про те, що елементи першого та другого рядків матриці (15) є пропорційними один до одного з коефіцієнтом пропорційності $\frac{p_2}{r_2}$.

Аналогічним чином покажемо пропорційність елементів другого та третього рядків матриці (15):

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{p_1 r_2}{p_1 q_2} & \frac{r_1 r_2}{r_1 q_2} & \frac{q_1 r_2}{q_1 q_2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \end{array} \right\} \frac{r_2}{q_2}. \quad (17)$$

Також, пропорційними є відношення між елементами першого та другого, другого та третього стовпчиків матриці (15):

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{p_1 p_2}{r_1 p_2} \\ \frac{p_1 r_2}{r_1 r_2} \\ \frac{p_1 q_2}{r_1 q_2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\} \frac{p_1}{r_1}; \quad \left\{ \begin{array}{c} \frac{r_1 p_2}{q_1 p_2} \\ \frac{r_1 r_2}{q_1 r_2} \\ \frac{r_1 q_2}{q_1 q_2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\} \frac{r_1}{q_1}; \quad (18)$$

Пропорційними є також перший та третій рядки та стовпчики. Як відомо [6], достатньо пропорційності лише між двома рядками або стовпчиками з (15), тоді визначник $\det A$ цієї матриці буде дорівнювати нулю:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = 0.$$

Твердження 2. *Визначник, складений із Б-функцій a_{ij} будь-якої Б-поверхні дорівнює нулю.*

Зазначимо, що і перше, і друге твердження, кожне окремо, є необхідною, але недостатньою умовою для визначення ППВ. Тому сформуване твердження 3, яке визначає необхідну і достатню умови.

Твердження 3. *Якщо суперпозиція $\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}$ елементів матриці*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ дорівнює одиниці } \left(\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} = 1 \right), \text{ а визначник } \det A = 0, \text{ то}$$

поверхня, що побудована на будь-яких вихідних даних $x_{11}, \dots, x_{33} \in$ Б-поверхнею.

Отже, композиційний метод геометричного моделювання полягає у наступному. Кожна точка M_{ij} (12) Б-поверхні вираховується як сума частин a_{ij} від одиниці, що помножена на відповідну координату x_{ij} , тобто є композицією частин значень координат вихідних точок. Оскільки вихідні дев'ять дійсних точок є незалежними, то їх можна обрати таким чином, щоб Б-поверхня стала площиною, кривою лінією, прямою або точкою. Існуючі математичні методи не надають таких можливостей поверхні, що мають комбінаційний характер утворення, тобто такі, що описані рівнянням або системою рівнянь, у яких зміна вихідних даних може привести до зміни самого рівняння.

І навпаки, Б-поверхні мають композиційний характер, у яких

незалежні координати (точки), як елементи пазлу, складають картину на основі нескінченної кількості композицій. Б-поверхні, в залежності від того, дискретно чи неперервно визначені їхні параметри, є дискретними або неперервними.

Висновки. Визначено новий тип поверхонь композиційного характеру – Б-поверхні відгуку, сформульовані їхні ознаки та правила створення точкових рівнянь, що їх описують. Показано властивості щодо їхнього виродження у площину, криву або пряму лінію, точку, що дає можливість розробити спосіб розгортання-згортання чарунок [7], на базі якого буде розроблено композиційний метод моделювання багатофакторних процесів, у якому є можливість поєднання різномірних вихідних елементів без обмежень у їх кількості, а також можливість виключати непотрібні і включати нові фактори без зміни самої моделі. Такі можливості здешевлять використання моделі та підвищать її практичність.

Література

1. Адоньєв Є.О. Застосування поверхонь відгуку при моделюванні сталого енергетичного розвитку міст / Є.О. Адоньєв, В.М. Верещага // Вісник Херсонського національного технічного університету. Вип. 3(58). – Херсон: ХНТУ, 2016. – С. 471-476.
2. Балюба И.Г. Точечное исчисление [учебное пособие] / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш; под ред. Верещаги В.М. – Мелитополь: Изд-во МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. – 234 с.
3. Бумага А.І. Точкове рівняння дуги параболі другого порядку. Геометрическое и компьютерное моделирование: энергосбережение, экология, дизайн [Текст]: Матер. IX Крымской междунар. науч.-практ. конф. (24-28 сентября 2012 г.). Симферополь. Міжвідомчий науково-технічний збірник. Прикладна геометрія та інженерна графіка (спецвипуск). – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 49-52.
4. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии, дополненные необходимыми сведениями из алгебры. – М. «Наука», 1967. – 912 с.
5. Конопацький Є. В. Геометричне моделювання алгебраїчних кривих та їх використання при конструюванні поверхонь у точковому численні Балюби-Найдиша [Текст]: дис.... канд. техн. наук: 05.01.01 / Євген Вікторович Конопацький. – Мелітополь, ТДАТУ, 2012. – 163 с.
6. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М., 1980. – 976 с.

7. Верещага В. М. Спосіб згортання (розгортання) чарунок [Текст] / В. М. Верещага, Є. О. Адоньєв, О. М. Павленко // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. А. В. Найдиш. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016. – Вип. 7. – С. 32-38.
8. Верещага В. М. Монофакторний принцип побудови моделі багатфакторних задач термореновації будівель [Текст] / В. М. Верещага, Є. О. Адоньєв // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. А. В. Найдиш. – Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016. – Вип. 7. – С. 24-31.

КОМПОЗИЦИОННЫЙ МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ: СУТЬ, ОСОБЕННОСТИ И ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ

Адоньєв Е.А.

В статье исследованы особенности композиционного метода геометрического моделирования, разработанного на основе точечного БН-исчисления, показаны принципы построения параболических поверхностей отклика (B-поверхностей), а также алгоритм обобщения исходных факторов модели. Показаны свойства B-поверхностей, которые позволяют эффективно использовать последние для моделирования многофакторных процессов.

Ключевые слова: точечное БН-исчисление, многофакторный композиционный метод моделирования, B-поверхность, параболическая поверхность.

COMPOSITION METHOD OF GEOMETRICAL MODELING: ESSENCE, FEATURES AND PROSPECTS OF APPLICATION

Adoniev E.

This article explores the features of the composite geometric modeling method, developed on the basis of point BN-calculus shows principles of construction of parabolic response surfaces (B-surface) and algorithm of generalization of model factors. The following properties of B-surfaces allow effectively use them for multifactor processes modeling.

Keywords: point BN-calculus, multifactor, composite modeling method, the B-surface, parabolic surface.