УДК 514.18

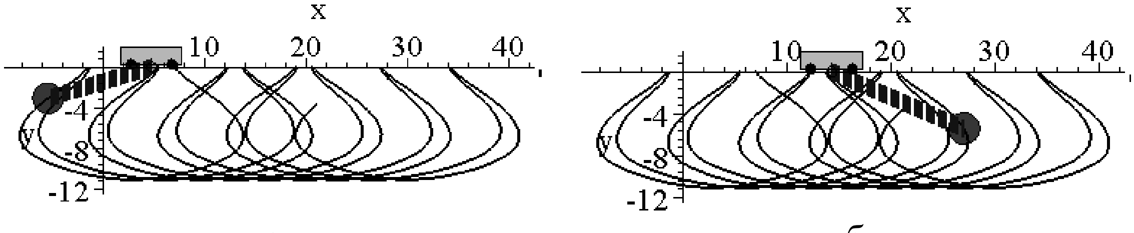
ІНІЦІЮВАННЯ РУХУ ВІЗКА ЗА ДОПОМОГОЮ ДВОХ МАЯТНИКІВ

Сухарькова О.І.,
Семенова-Куліш В.В., к.т.н.,
Морозова Г.В., к.т.н.,
Бородін Д.Ю., к.т.н.
Український державний університет залізничного транспорту
(м. Харків, Україна)

Розглянуто геометричну модель ініціювання руху візка у горизонтальному напрямку за допомогою коливання у вертикальній площині двох приєднаних до нього маятників. Ключовим моментом є визначення нехаотичних траєкторій переміщення вантажів маятників.

Ключові слова: лагранжіан, рівняння Лагранжа другого роду, траєкторія переміщення вантажу, маятник під візком.

Постановка проблеми. В роботах [1, 2] розглянуто можливість переміщення візка у горизонтальному напрямку за допомогою коливання пружинного маятника, розташованого під візком. При чому конструкція пружинного маятника має забезпечити прямолінійність осі пружини в процесі коливання. Геометричне моделювання цієї коливальної системи дозволило пояснити (і унаочнити) причини руху візка, які пов'язані зі стисненням чи розтягненням пружини (з коефіцієнтом жорсткості k і довжиною d у ненавантаженому стані) в певні зручні моменти положення вантажу на траєкторії його переміщення. Тобто ініціювання руху візка масою m_1 у горизонтальному напрямку здійснюється завдяки погодженим коливанням маятника, вантаж масою m_2 якого має рухатися по наперед знайденій нехаотичній траєкторії (рис. 1).



а б

Рис. 1. Коливання пружинного маятника під візком при значеннях: k = 250 і d = 5; а) m_1 = 150; б) m_2 = 40;

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботах [1,2] знайдено такі умовні значення параметрів, які забезпечують нехаотичну траєкторію вантажу: маса візка $m_1 = 150$; маса вантажу пружинного маятника $m_2 = 40$; коефіцієнт жорсткості пружини $k = 250$ і довжина пружини у ненавантаженому стані $d = 5$. Нехаотична траєкторія руху вантажу дозволяє узгодити з напрямком руху візка процеси розпрямлення (рис. 1, а) і стиснення пружини (рис. 1, б). Актуальним буде узагальнення розглянутого питання для випадку двох маятників.

Формулювання цілей статті. Навести геометричну модель ініціювання руху візка у горизонтальному напрямку за допомогою коливання у вертикальній площині двох маятників, приєднаних до візка. При цьому ключовим моментом є визначення нехаотичних траєкторій переміщення вантажів цих маятників.

Основна частина. Для складання геометричної моделі руху візка обрано такі умови ідеалізації: а) параметри коливальної системи і початкові умови задаються в умовних одиницях; б) коливання маятників здійснюються у вертикальній площині; в) всі елементи системи не мають товщини, невагомі і не деформуються, опори у вузлах і опір повітря під час коливань відсутні; г) коливальна система є консервативною – тобто запас механічної енергії в процесі коливань залишається постійним (втрати енергії відсутні). Вважаємо, що процес розсіювання енергії відбувається повільно в порівнянні з характерними масштабами часу в системі.

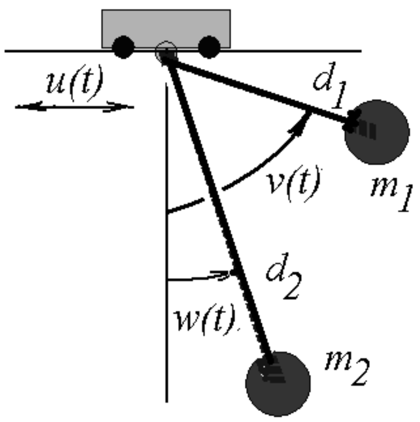


Рис. 2. Схема двох маятників під візком

На рис. 2 наведено схему коливальної системи, яка складається з візка та підвішених до нього двох маятників. Для опису динаміки руху цієї коливальної системи використаємо рівняння Лагранжа другого роду. Як узагальнені координати оберемо такі параметри: $u(t)$ – горизонтальне зміщення візка; $v(t)$ – кут відхилення від вертикалі першого маятника; $w(t)$ – кут відхилення від вертикалі другого маятника.

Далі у формулах прийнято позначення: m_0 – маса візка; m_1 – маса вантажу першого маятника; m_2 – маса вантажу другого маятника; d_1 – довжина першого маятника; d_2 – довжина другого маятника; g = 9,81.

Система рівнянь Лагранжа другого роду має вигляд:

$$
\begin{aligned}
&(m0+m1+m2)\left(\frac{d^2}{dt^2}u(t)\right)-m1d1\cos(v(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}v(t)\right)-m2d2\cos(w(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}w(t)\right)\\
&+m1d1\sin(v(t))\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)^2+m2d2\sin(w(t))\left(\frac{d}{dt}w(t)\right)^2=0\ ;\\
&-m1d1\cos(v(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}u(t)\right)+m1d1^2\left(\frac{d^2}{dt^2}v(t)\right)+m1d1g\sin(v(t))=0;\\
&-m2d2\cos(w(t))\left(\frac{d^2}{dt^2}u(t)\right)+m2d2^2\left(\frac{d^2}{dt^2}w(t)\right)+m2d2g\sin(w(t))=0\ .
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Розв’язувати систему рівнянь (1) будемо чисельно за допомогою методу Рунге-Кутти з параметрами d_1 = 4; d_2 = 8; m_0 = 1; m_1 = 1 і з початковими умовами $u_0 = 0$; $u'_0 = 0$; $v_0 = 0$; $v'_0 = 1$; $w_0 = 1$ і $w'_0 = -1$.

З обраних умов слідує, що стартове положення візка на початку координат (умова $u_0 = 0$) без початкової швидкості (умова $u'_0 = 0$). Перший маятник починає рух з вертикального положення (умова $v_0 = 0$), якому надано швидкості умовної одиниці у напрямку проти годинникової стрілки (умова $v'_0 = 1$). Другий маятник починає рух з відхиленого положення (умова $w_0 = 1$), якому надано швидкості величиною від’ємної умовної одиниці у напрямку за годинниковою стрілкою (умова $w'_0 = -1$). В результаті візок буде рухатися по осі *Ox* праворуч. На характер руху впливатимуть величини параметрів інерціоїда і значення початкових умов.

Розрахунок коливань маятникової системи (рис. 2) виконаємо за умови визначення невідомого значення маси m_2 залежно від інших відомих параметрів схеми. Для обчислення критичного значення m_2 використаємо спосіб проекційного фокусування [2]. Для цього побудуємо наближене зображення інтегральної кривої у фазовому просторі однієї з функцій узагальнених координат, що залежатиме від певного значення параметра m_2. При довільному значенні m_2 у фазовому просторі одержимо «заплутану» інтегральну криву. Її проекція на фазову площину також матиме вигляд «заплутаної» фазової кривої (рис. 3). При значенні m_2 = 2 одержуємо проекційне фокусування (рис. 4).

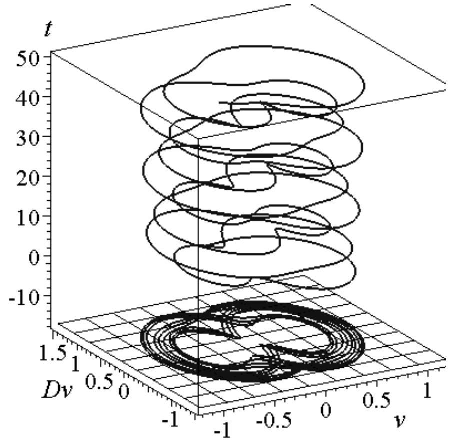


Рис. 3. Інтегральна крива і фазова траєкторія узагальненої координати v(t) для довільного значення m_2

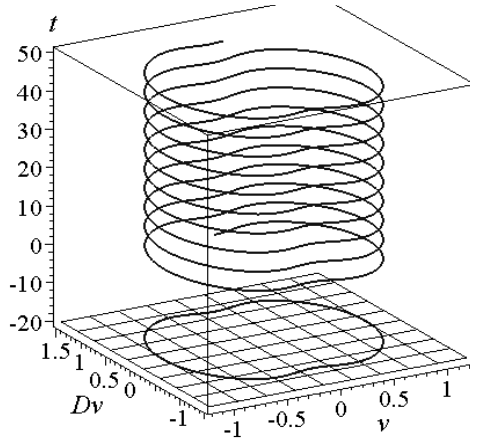


Рис. 4. Інтегральна крива і фазова траєкторія узагальненої координати v(t) для значення параметра $m_2 = 2$

На рис. 5, 6 зображено «сфокусовані» інтегральні криві і фазові траєкторії узагальнених координат *u(t)* і *w(t)* для значення параметра $m_2 = 2$. При поєднанні критичного значення m_2 з іншими вихідними параметрами коливальної системи можливо знайти шукані наближені розв'язки диференціальних рівнянь Лагранжа другого роду [2]. В результаті обчислень було знайдено набір значень параметрів $d_1 = 4$; $d_2 = 8$; $m_0 = 1$; $m_1 = 1$; $m_2 = 2$ і початкових умов $u_0 = 0$; $u'_0 = 0$; $v_0 = 0$; $v'_0 = 1$; $w_0 = 1$ і $w'_0 = -1$, які забезпечують існування нехаотичних траєкторій переміщення обох вантажів.

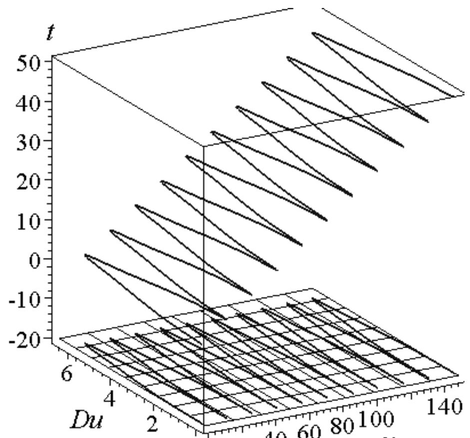


Рис. 5. Інтегральна крива і фазова траєкторія узагальненої координати *u(t)* для значення параметра $m_2 = 2$

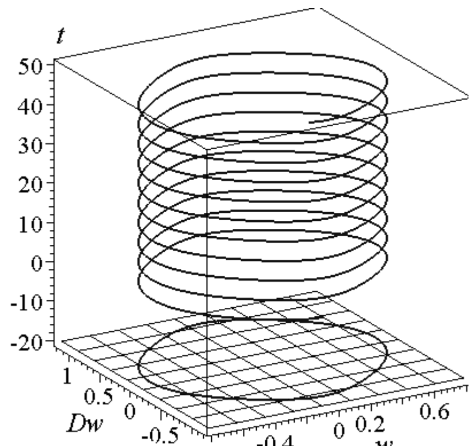


Рис. 6. Інтегральна крива і фазова траєкторія узагальненої координати *w(t)* для значення параметра $m_2 = 2$

Позначимо через *U(t) V(t)* і *W(t)* наближені розв'язки рівнянь (1), які забезпечують існування двох нехаотичних траєкторій переміщення обох вантажів маятників. Використовуючи знайдені розв'язки в декартовій системі координат *xOy*, траєкторії переміщення вантажів маятників побудуємо за формулами:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= U(t) + d_1 \sin(V(t)); & x_2(t) &= U(t) + d_2 \sin(V(t)); \\ y_1(t) &= d_1 \cos(V(t)); & y_2(t) &= d_2 \cos(V(t)) . \end{aligned} \quad (2)$$

На рис. 7 наведено розраховані нехаотичні траєкторії руху вантажів маятників для обраного варіанту.

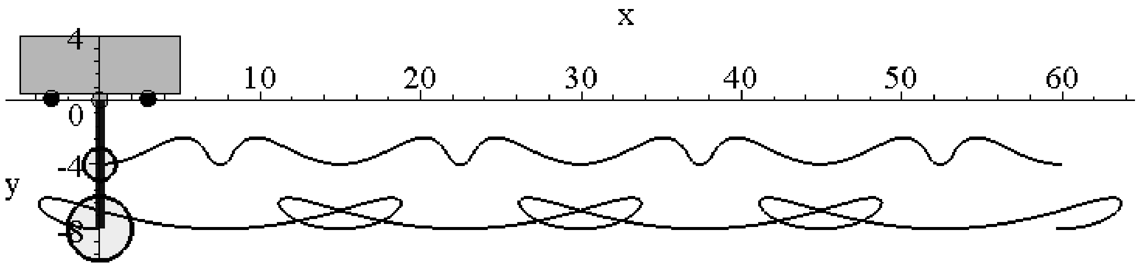


Рис. 7. Обчислені траєкторії руху вантажів маятників

Було складено програму геометричного моделювання руху візка з маятниками за результатами розв'язання системи рівнянь Лагранжа другого роду (1). На базі програми створено анімаційний фільм, кадри з якого представлені на рис. 8. Перегляд фільму дає підстави стверджувати, що наведений варіант розрахунку характеризується рухом візка праворуч без зупинок завдяки організованим рухам двох вантажів маятників по обчислених траєкторіях.

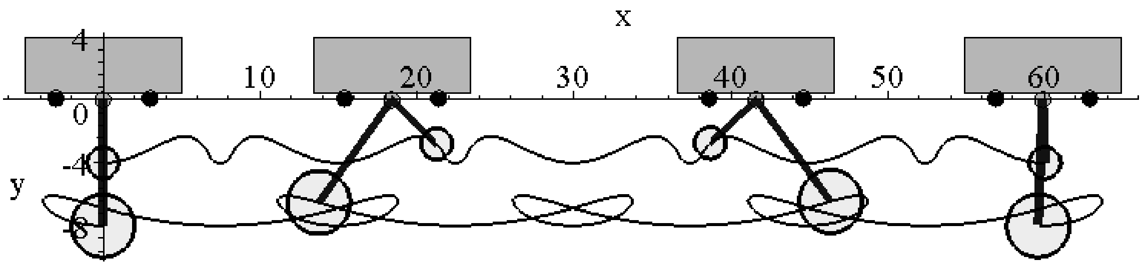


Рис. 8. Зображення деяких фаз коливань маятників під візком

Висновки. Розроблений спосіб дозволяє визначати параметри нехаотичних траєкторій коливань маятників, здатних ініціювати рух візка у горизонтальному напрямку. Це доповнює пояснення феномену механіки безопорного руху, ініціатором чого був В.М. Толчин. Він створив діючий макет механічного пристрою - інерціоїда [3], який складається із двох ексцентричних вантажів на важелях (тобто двох негравітаційних маятників), що установлені на рухомому візку [4] і коливання яких ініціює переміщення візка.

Література

1. Куценко Л.М. Дослідження ініціювання руху візка за допомогою коливання 2d-пружинного маятника / Л.М. Куценко, О.М. Семків // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. Праць. – Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2016. – Вип. 6. – С. 71–76.
2. Семків О.М. Графічний комп’ютерний спосіб визначення нехаотичних траєкторій коливань маятникових систем / О.М. Семків // Вестник Харьковского нац. автомобильно-дорожного университета. – Харьков: ХНАДУ, 2016. – Вып. 72. – С. 94–101.
3. Толчин В.Н. Инерцоид. Силы инерции как источник поступательного движения [Електроний ресурс] / В.Н. Толчин. – Пермь: Пермское книжное издательство, 1977 – 103 с. Режим доступу: http://second-physics.ru/lib/books/tolchin_inertioid.djvu.
4. Шипов Г.И. 4D гироскоп в механике Декарта [Електроний ресурс] / Г.И. Шипов. – Кирилица, 2006. – 74 с. Режим доступу: http://www.shipov.com/files/021209_tolchdescart.pdf.

ИНИЦИИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛЕЖКИ ПРИ ПОМОЩИ ДВУХ МАЯТНИКОВ

Сухарькова Е.И., Семенова-Кулиш В.В., Морозова Г.В., Бородин Д.Ю.

Рассмотрена геометрическая модель инициирования движения тележки в горизонтальном направлении при помощи колебания в вертикальной плоскости двух присоединенных к нему маятников. Ключевым моментом являются определения нехаотических траекторий перемещения грузов маятников.

Ключевые слова: лагранжиан, уравнение Лагранжа второго рода, траектория перемещения груза, маятник под тележкой.

INITIATION OF TRUCK TRAFFIC WITH THE HELP OF TWO PENDULUMS

Sukharkova E., Semenova-Kulish V., Morozova G., Borodin D.

A geometrical model for initiating the motion of a trolley in the horizontal direction is considered with the aid of a vibration in the vertical plane of two pendulums attached to it. The key point is the definition of non-chaotic trajectories of the movement of pendulum loads.

Key words: Lagrangian, Lagrange equation of the second kind, trajectory of cargo moving, pendulum under the cart.