

УДК 519.632.4

КОНСТРУКТИВНИЙ АЛГОРИТМ АПРОКСИМАЦІЇ ДИСКРЕТНИХ ЕМПІРИЧНИХ КОНТУРІВ

Тулученко Г.Я., д.т.н.,

Старун Н.В., к.т.н.,

Маломуж Т.В., к.т.н.

Херсонський національний технічний університет (Україна)

У роботі обґрунтовується конструктивний алгоритм багатофокусної апроксимації дискретних без самоперетинів контурів, які можуть бути описані у полярній системі координат. Показано, що запропонований алгоритм забезпечує побудову апроксимуючої лемніскати, що складається із одного контуру. Досліджуваний метод багатофокусної апроксимації дозволяє більш стисло подавати інформацію про геометричну форму емпіричного контуру порівняно із традиційними способами наближення, наприклад, сплайнами.

Ключові слова: дискретний замкнений контур, апроксимація, багатофокусна лемніската.

Постановка проблеми. Апроксимація багатофокусними лемнісками замкнених без самоперетинів емпіричних контурів дозволяє компактно подавати інформацію про їх геометричну форму. Головна проблема, що виникає при реалізації методів багатофокусної апроксимації пов'язана із забезпеченням виконання умов локалізації фокусів всередині одного контуру лемніскати, рівняння якого є невідомим на момент формування умов.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Теорема існування апроксимуючої лемніскати для замкненого без самоперетинів неперервного контуру доведена Д. Гільбертом у 1897 році, але конструктивного алгоритму побудови такої лемніскати німецьким математиком не було запропоновано. Сучасні дослідження задачі практичної побудови апроксимуючої лемніскати для дискретного контуру найбільш активно проводяться автором робіт [1-2].

Для проведення власного дослідження авторами публікації використовувалися можливості пакету DirectSearch щодо розв'язання задач нелінійної умовної оптимізації, які описані у роботі [3]. Пакет DirectSearch є сумісним із системою комп'ютерної математики Maple.

Формулювання цілей статті. Обґрунтувати конструктивний алгоритм побудови апроксимуючої багатофокусної лемніскати, яка

складається із одного контуру, у задачі наближення дискретно поданого замкненого без самоперетинів контуру.

Основна частина. Нехай на комплексній площині заданий зіркоподібний емпіричний контур, тобто такий, що може бути описаний у полярній системі координат, послідовністю точок $z_j = x_j + i \cdot y_j \quad j = \overline{1; N}$; N – кількість точок емпіричного контуру. Доповнимо послідовність точок $(N+1)$ -ою точкою: $z_1 = z_{N+1}$.

Побудуємо послідовність полярних радіусів точок емпіричного контуру: $\rho_j = \rho(\arg z_j)$. Апроксимуємо цю послідовність за допомогою періодичного сплайну $Spline(\arg z_k)$ другого або третього степеня або за допомогою сплайна першого степеня.

Припустимо, що шукана апроксимуюча лемніската має m фокусів, які ми позначимо z_k , де $k = \overline{1; m}$.

Попередні обчислювальні експерименти показали, що фокуси апроксимуючої лемнікати не наближуються нескінченно близько до самої кривої, тому обмеження виду

$$|z_k| \leq |Spline(\arg z_k)|, \quad k = \overline{1; m} \quad (1)$$

доцільно застосовувати для забезпечення локалізації фокусів лемнікати всередині одного контуру. Недоліки сплайнової інтерполяції емпіричного контуру, що можуть виникати, є окремою задачею і в даному дослідженні не обговорюються. У більшості випадків в досліджуваній задачі для запобігання негативного впливу паразитарних осциляцій у сплайнів достатнього перейти до сплайна першого степеня з можливим згущенням точок емпіричного контуру.

Застосування можливостей функції GlobalSearch пакету DirectSearch, яка виконує пошук умовного глобального екстремуму, дозволяє не обмежувати вибір критерію близькості дискретного емпіричного та неперервного апроксимуючого контурів тими, що є лінійними відносно коефіцієнтів поліному, який визначає рівняння багатофокусної лемнікати. Обчислювальні експерименти доцільно виконувати з одним із критеріїв близькості контурів:

$$Q_1 = \sum_{j=1}^N \left| |P(z_j)| - |R^m| \right| \rightarrow \min, \quad (2)$$

$$Q_2 = \max_{j=1; N} \left| |P(z_j)| - |R^m| \right| \rightarrow \min, \quad (3)$$

де $P(z) = \prod_{k=1}^m (z - z_k)$, z_k – фокуси, m – кількість фокусів

багатофокусної лемнікати.

Для зручності обчислень усі модулі, що мають місце в формулах (2-3), можуть бути піднесені до квадрата.

Розв'язання задачі мінімаксу порівняно із традиційними методами [4] значно простіше виконується за допомогою наближених методів, що використовують еквівалентні диференційовані цільові функції [5]:

$$Q_3 = \sum_{j=1}^N \left| |P(z_j)| - |R^m| \right|^v \rightarrow \min, \text{ коли } v \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Висновки. На тестових прикладах кращі за точністю наближення результати були отримані для критерію близькості емпіричного і апроксимуючого контурів (2). Для відомих із літературних джерел споріднених задач поліноміальної апроксимації замкнених контурів на комплексній площині (наприклад, із робіт [6-7]) така ж точність апроксимації досягається при поліномах більш низького степеня. При порушеннях гладкості у емпіричних замкнених контурах точність при застосуванні конформних перетворень у внутрішніх кутах емпіричної ламаної, які менші або рівні прямому куту, а при застосуванні багатофокусної апроксимації – в зовнішній кутах такої ж градусної міри.

Налаштування параметрів процедури GlobalSearch дозволяє уникнути необхідності введення початкових наближень положень фокусів апроксимуючої лемніскати.

Перспективи подальших досліджень пов'язані із розробкою аналогічного алгоритму для довільних емпіричних контурів на основі їх природної параметризації.

Література

1. Ракчеева Т.А. Критерии и сходимость многофокусной аппроксимации. / Т.А. Ракчеева // Компьютерные исследования и моделирование. – 2013. – Т. 5. – № 3. – С. 379–394.
2. Ракчеева Т.А. Многофокусные лемнискаты: приближение кривых / Т.А. Ракчеева // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. – Т.50. – №11. – С. 2060–2072.
3. Моисеев С.Н. Универсальный метод оптимизации без использования производных с квадратичной сходимостью [Электронный ресурс] / С.Н. Моисеев. – Воронеж, 2011. – 25 с. Режим доступа: <http://www.twirpx.com/file/1534928/>
4. Демьянов В.Ф. Введение в минимакс / В.Ф. Демьянов, В.Н. Малоземов. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва "Наука", 1972. – 368 с.

5. Chen Reuven. Solution of Minimax Problem Using Equivalent Differentiable Functions / Reuven Chen // Computers & Mathematics with Applications. – 1985. – Vol. 11. – № 12. – P. 1165–1169.
6. Фильчаков П.Ф. Приближенные методы конформных отображений / П.Ф. Фильчаков. – К.: Наукова думка, 1964. – 531 с.
7. Кушнарев А.А. О построении конформного отображения крестообразной области методом последовательных приближений / А.А. Кушнарев, В.Н. Чехов // Динамические системы. – 2007. – Вып. 22. – С. 3–10.

КОНСТРУКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ АППРОКСИМАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ ЭМПИРИЧЕСКИХ КОНТУРОВ

Тулученко Г.Я., Старун Н.В., Маломуж Т.В.

В работе обосновывается конструктивный алгоритм многофокусной аппроксимации дискретных без самопересечений контуров, которые могут быть описаны в полярной системе координат. Показано, что предложенный алгоритм обеспечивает построение аппроксимирующей лемнискаты, которая состоит из одного контура. Исследуемый метод многофокусной аппроксимации позволяет более сжато представлять информацию о геометрической форме эмпирического контура по сравнению из традиционными способами приближения, например, сплайнами.

Ключевые слова: дискретный замкнутый контур, аппроксимация, многофокусная лемниската.

CONSTRUCTIVE ALGORITHM OF APPROXIMATION OF DISCRETE EMPIRICAL CONTOURS

Tuluchenko H., Starun N., Malomuzh T.

In the paper, a constructive algorithm of the multifocus approximation for discrete self-intersecting contours that can be described in the polar coordinate system is substantiated. It is shown that the proposed algorithm provides the construction of an approximating lemniscate, which consists of a single contour. The investigated method of multifocus approximation allows more concisely to present information about the geometric form of the empirical contour in comparison with traditional methods of approximation, for example, by splines.

Keywords: discrete closed contour, approximation, multifocus lemniscate.