УДК 515.2

МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ КРИВИХ ЗА ТОЧКОВИМ КАРКАСОМ ПРИ ОЦІНЮВАННІ ВІДХИЛЕНЬ ЗА НОРМАЛЛЮ

Білицька Н.В., к.т.н.,
Гетьман О.Г., к.т.н.
Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" (Україна)

В роботі розглядається методика моделювання опуклих кривих за точковим каркасом поліноміальними функціями. Точність моделювання кривих за точками каркасу оцінюється за середньоквадратичним відхиленням за нормаллю до кривої. Для визначення параметрів кривих застосовується метод узагальненого градієнтного спуску.

Ключові слова: метод узагальненого градієнтного спуску, точковий каркас, середньоквадратичне відхилення за нормаллю, штрафна функція.

Постановка проблеми. При конструюванні і технологічному відтворенні обводів виробів складної форми виникає необхідність застосування нових способів створення моделей дугами поліноміальних кривих, поділу їх на окремі частини опуклості та визначення їх параметрів. При розробці таких способів доцільно використовувати методи апроксимації замість інтерполяції.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для інтерполяції точкового каркаса обводів виробів складної форм опуклою кривою найчастіше застосовуються криві другого порядку або криві Без'є третього порядку [1], але в цьому випадку застосування апроксимаційних методик з деякою наперед заданою точністю призводить до значних обчислювальних труднощів, а точне проведення кривих через точки каркаса приводить до високої дрібності обводу.

Формулювання цілей статті. Метою статті є розробка методика моделювання складних обводів за точковим каркасом з наперед заданою точністю ***ε.*** Методика базується на методі узагальненого градієнтного спуску, а для забезпечення опуклості кривих застосовується штрафна функція.

Основна частина. При моделюванні обводів складних технічних виробів нерідко виникає завдання математичного опису опуклої кривої, заданою дискретним точковим каркасом:

$$S = \{A_i(x_i, y_i) \mid i = \overline{1, N}\}, \tag{1}$$

де $A(x_i, y_i)$ – множина точок каркасу.

Для зменшення дрібності обводів та полегшення розрахунків в якості апроксимуючих функцій виберемо клас поліномів,

$$y = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \tag{2}$$

а вимогу опуклості розглядатимемо як додаткову умову.

Відхилення точок каркаса від апроксимуючої функції доцільно оцінювати за нормаллю до кривої, причому оцінюватимемо для конкретності середньоквадратичне відхилення.

Виведемо ряд допоміжних залежностей. Відстань від точки каркасу $A_i(x_i, y_i)$ до довільної точки кривої визначається формулою.

$$l = \sqrt{(x_i - x)^2 + \left(y - \sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right)^2}. \tag{3}$$

Оскільки відстань від точки до кривої за нормаллю є найкоротшою, то

$$\begin{gathered} \frac{dl}{dx}\Big|_{O_i} = 0, \ \ i = 1, N, \\ x_{O_i} = x_i + \left(y_i - \sum_{j=0}^{n} a_j x_{O_i}^j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j a_j x_{O_i}^{j-1}\right), i = 1, N, \end{gathered} \tag{4}$$

Таким чином, для апроксимації точкового каркаса (1) поліноміальними функціями при оцінюванні середньоквадратичного відхилення по нормалі, необхідно мінімізувати функціонал

$$F = \sum_{i=0}^{N} \left[\left(x_i - x_{O_i}\right)^2 + \left(y_i - \sum_{j=0}^{n} a_j x_{O_i}^j\right)^2\right], \tag{5}$$

при обмеженнях (4).

Для вирішення завдань такого виду на основі методу узагальненого градієнтного спуску з розтягуванням простору у напрямі різниці двох послідовних градієнтів в [2] розроблена методика, яка дозволяє враховувати деякі додаткові геометричні умови при конструюванні. Умова опуклості має велике значення при конструюванні, але врахувати її значно складніше, ніж інші, оскільки вона носить інтегральний характер.

Умова опуклості аналітично виражається в постійності знака другої похідної

$$\left[\begin{array}{l} f''(x) \geq 0, \ \ x \in [a, b] \\ f''(x) \leq 0, \ \ x \in [a, b] \end{array}\right., \tag{5}$$

де $y = f(x)$ – апроксимуюча функція, $[a, b]$ – ділянка апроксимації. У даному випадку передусім необхідно перевірити опуклість каркаса, і якщо він задовольняє вимогам опуклості, то визначити, який знак повинна мати друга похідна. Але залежно від специфіки завдання відкоригувати точковий каркас, чи розбити його на ділянки опуклості точками перегину.

Для перевірки опуклості каркаса необхідно перевірити, чи виконуються наступні співвідношення для кожної з точок каркаса: якщо $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$, $i = \overline{1, N-1}$, тоді

$$y_i \geq \frac{y_{i-1} + y_{i+1}}{2} \tag{6}$$

або

$$y_i \leq \frac{y_{i-1} + y_{i+1}}{2}. \tag{7}$$

Причому повинно виконуватися або умова (6) для усіх точок каркаса, або умова (7) також в усіх точках каркаса. Якщо виконується умова (6), то $f''(x) \geq 0$, якщо умова (7), то $f''(x) \leq 0$.

Припустимо, що виконується умова (6), тоді для поліноміальної функції умова опуклості має вигляд

$$\sum_{j=2}^{n} j(j-1)a_j x^{j-2} \geq 0, \quad x \in [a, b]. \tag{8}$$

Ця умова накладає спільні обмеження на вектор коефіцієнтів a_i ($i = \overline{1, N-1}$ і значення x. Вказані особливості умови опуклості призводять до необхідності заміни його еквівалентним обмеженням виду

$$\varphi(a) = 0. \tag{9}$$

Для цього умову (8) замінимо еквівалентною умовою

$$\min_x \sum_{j=2}^{n} j(j-1)a_j x^{j-2} \geq 0 \tag{10}$$

чи, поклавши

$$\min_x \sum_{j=2}^{n} j(j-1)a_j x^{j-2} = \varphi(a), \tag{11}$$

отримаємо

$$\varphi(a) \geq 0. \tag{12}$$

Умова (12) відрізняється від умови (9) лише наявністю знаку нерівності, який може бути врахований введенням штрафної функції [2]:

$$\varphi(a) = \min(\varphi(a), 0). \tag{13}$$

Це обмеження може бути враховане при мінімізації функціонала (5) за допомогою множників Лагранжа. Для цього складемо новий функціонал:

$$F = \sum_{i=0}^{N} \left(x_i - x_{0_i} \right)^2 + \left(y_i - \sum_{j=0}^{n} a_j x_{0_i}^j \right)^2 + \lambda\varphi(a). \tag{14}$$

Мінімізація функціонала вимагає багатократного повторення наступних двох операцій: обчислення значень функціонала (14) при фіксованих значеннях коефіцієнтів a_j та обчислення значення узагальненого градієнта при тих же a_j.

Отримання значення функціонала (14) натрапляє на труднощі через невизначеність значення множника Лагранжа λ і нетривіальність обчислення штрафної функції φ. Вибір значення множника λ здійснюється від досить великих значень (близько декількох сотень) до малих. Якщо при декількох послідовних змінах в 5-10 разів результат рішення безумовної оптимізаційної задачі не змінюється, то він є рішенням початкової задачі умовної оптимізації. Інакше початкове значення λ має бути збільшене.

Обчислення значення штрафної функції може бути здійснено або рішенням алгебраїчного рівняння

$$\sum_{j=3}^{n} j(j-1)(j-2)a_j x^{j-3} = 0. \tag{15}$$

або мінімізацією виразу в лівій частині нерівності (10), наприклад, за допомогою градієнтного методу. Підстановка знайденого значення x в (11) та (13) дозволяє завершити обчислення φ.

При обчисленні узагальненого градієнта основні труднощі виникають з визначенням градієнта $\varphi(a)$. Для отримання останнього продиференціюємо (11) та (15) по a_j в припущенні, що значення x те, що доставляє мінімум

$$\sum_{j=2}^{n} j(j-1)a_j x^{j-2},$$

знайдене. Маємо

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\sum_{i=2}^{n} i(i-1)a_i x^{i-2} = \\ = j(j-1)x^{j-2} + \sum_{i=3}^{n} i(i-1)(i-2)\,a_i x^{i-3}\frac{\partial x}{\partial a_j} + \tag{16}$$

$$+j(j-1)(j-2)x^{j-3} + \sum_{i=4}^{n} i(i-1)(i-2)(i-3)a_i x^{i-4}\frac{\partial x}{\partial a_j} = 0. \tag{17}$$

З (17) отримаємо

$$\frac{\partial x}{\partial a_j} = -\frac{j(j-1)(j-2)x^{j-3}}{\sum_{i=4}^{n} i(i-1)(i-2)(i-3)a_i x^{i-4}}. \tag{18}$$

Підставивши (18) в (16), остаточно отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\sum_{i=2}^{n} i(i-1)a_i x^{i-2} = j(j-1)x^{j-2} - \\ -\frac{j(j-1)(j-2)x^{j-3}}{\sum_{i=4}^{n} i(i-1)(i-2)(i-3)a_i x^{i-4}}\sum_{i=3}^{n} i(i-1)(i-2)a_i x^{i-3}. \tag{19}$$

Формула визначає значення компоненти градієнта φ залежно від поточних значень коефіцієнтів a_j і значення x, що доставляє мінімум

$\sum_{j=2}^{n} j(j-1)a_j x^{j-2}$. Але оскільки останнє знайдене при обчисленні F, можна вважати, що градієнт φ визначений повністю.

Висновки. Запропоновано спосіб моделювання складних обводів за точковим каркасом, який базується на методі узагальненого градієнтного спуску із застосуванням штрафних функцій, які дозволяють врахувати інтегральні характеристики кривих. Подальший розвиток цього дослідження доцільно вести у напрямку моделювання умов стикування окремих дуг вихідної кривої.

Література

1. Шепель В.П. Геометричні побудови на базі моделей кубічних кривих Без'є / В.П. Шепель, Н.В. Білицька, О.Г. Гетьман // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Збірник наукових праць. – Харків: ХДУХТ, 2007. – Вип.18. – С.47-50.
2. Еремин И.И. О методе «штрафов» в выпуклом программировании / И.И. Еремин. – Кибернетика, 1967. – №4. – с.63-67.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ КРИВЫХ ПО ТОЧЕЧНОМУ КАРКАСУ ПРИ ОЦЕНКЕ ОТКЛОНЕНИЙ ПО НОРМАЛИ

Белицкая Н.В., Гетьман А.Г.

В работе рассматривается методика моделирования выпуклых кривых по точечному каркасу полиномиальными функциями. Точность моделирования кривых по точкам каркаса оценивается по среднеквадратичному отклонению по нормали к кривой. Для определения параметров кривых применяется метод обобщенного градиентного спуска.

Ключевые слова: метод обобщенного градиентного спуска, точечный каркас, среднеквадратичное отклонение по нормали, штрафная функция.

DESIGN OF DIFFICULT CURVES AFTER POINT FRAMEWORK AT ESTIMATION OF REJECTIONS ON NORMAL

Bilytska N., Hetman A.

Methodology of design of convex curves is in-process examined after to point framework by polinom functions. Precision of design of curves for given points of framework is estimated after standard deviation for normals to the curve. For determination of parameters of curve the method of the generalized gradient descent is used.

Keywords: method the generalized gradient descent, point framework, standard deviation by normal, penalty function.