УДК 519.816:519.669

УМЕНЬШЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ПРИ РАСЧЕТЕ ИНДЕКСА СЛУЧАЙНОЙ СОГЛАСОВАННОСТИ

Захарчук Н.Г.,
Коперсак В.Н.,
Ладогубец Т.С.,
Финогенов А.Д., к.т.н.
Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского" (Украина)

В работе рассмотрены особенности непосредственного вычисления индекса случайной согласованности для обратно-симметричных матриц, получаемых в результате парных сравнений альтернатив. Приведены способы уменьшения вычислительной сложности алгоритмов расчета.

Ключевые слова: обратно-симметричные матрицы, парное сравнение альтернатив, метод анализа иерархий, индекс случайной согласованности, вычислительная сложность.

Постановка проблемы. В методе анализа иерархий (МАИ) [1] и ряде других методов принятия решений, одним из этапов получения оценок является парное сравнение альтернатив, результатом которого являются обратно-симметричные матрицы парных сравнений (МПС). Оценка согласованности (1) (ОС) суждений эксперта или лица принимающего решения (ЛПР), которая может быть нарушена как человеческими факторами (некомпетентностью, возможностями по оценке, отсутствием достоверной информации об альтернативах и т.д.), так и недостатками используемой шкалы сравнения, проводится путем сравнения индекса согласованности (ИС) с индексом случайной согласованности (ИСС):

$$ОС = ИС / ИСС; \tag{1}$$

$$ИС = \frac{\lambda_{\max} - N}{N - 1}, \tag{2}$$

где $\lambda_{\max}$ – максимально собственное число матрицы, N – размерность матрицы.

ИСС в свою очередь, также определяется на основании (2) для случайной выборки МПС, элементами которых являются соответствующие элементы выбранной шкалы сравнения. В разных источниках [2], данные для ИСС отличаются, в виду различий в методах расчета, размерах выборки и исследуемой шкалы.

Анализ последних исследований и публикаций. В работе [2] приведены результаты полученных оценок ИСС различными авторами. Для матриц малой размерности (N=3-5), в работе [3] было предложено использовать вместо случайной выборки матриц – все возможные МПС для выбранной шкалы сравнения с получением точного значения.

Формулировка цели статьи. При использовании подхода, основанном на полном переборе всех матриц определенной размерности, основным фактором, препятствующим получению результата является объем требуемых вычислений. В данной статье рассмотрены некоторые подходы к уменьшению вычислительной сложности на разных этапах алгоритма.

Основная часть. Рассмотрим алгоритм получения значения ИСС, основанном на вычислении $\lambda_{\max}$, предложенном в [3]:

1) формирование всех возможных МПС размерностью N для выбранной шкалы сравнений (наиболее распространена шкала (3):

$$\Omega = \{1/9,1/8,1/7,1/6,1/5,1/4,1/3,1/2,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}; \qquad (3)$$

2) вычисление коэффициентов характеристического уравнения;

3) определение значения $\lambda_{\max}$, как корня характеристического уравнения, методом Ньютона.

На каждом из этапов алгоритма используются специфические подходы к уменьшению вычислительной сложности.

1. Формирование набора матриц.

В МПС, заполняемой на основании суждений эксперта, выполняются следующие условия:

$$a_{ij} = 1/a_{ji}, \quad i,j = \overline{1,N}, \quad (a_{ii} = 1). \qquad (4)$$

Таким образом, вся МПС однозначно определяется элементами над (под) главной диагональю. Количество таких элементов для матрицы размерности N составляет S=½(N^2-N).

Количество необходимых расчетов можно сократить, если использовать свойство «симметрии» блоков (рис. 1). Отметим, что подобие матриц осуществляется только в случае симметрии всего блока, а не отдельных элементов в блоках [5].

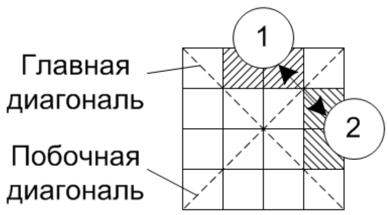

Рис.1. Схема симметрии блоков

Общее количество возможных вариантов матриц при использовании шкалы (3), содержащей C = 17 различных элементов, представлено в таблице 1, где S – количество определяющих элементов матрицы (количество элементов над главной диагональю), K – количество возможных матриц, K* – количество матриц с учетом симметрии, B – выигрыш от использования симметрии в %.

Таблица 1

Количество матриц для шкалы Ω (3)

N	S	K	K*	B	N	S	K	K	B
3	3	4913	2601	47.05	7	21	6.9E+25	3.5E+25	50
4	6	2.4E+7	1.2E+7	49.83	8	28	2.8E+34	1.4E+34	50
5	10	2.0E+12	1.0E+12	50	9	36	2.0E+44	9.9E+43	50
6	15	2.9E+18	1.4E+18	50	10	45	2.3E+55	1.2E+55	50

Подобие обратно-симметричных матриц относительно побочной диагонали позволяет уменьшить количество необходимых вычислений на 47-50%.

2. Вычисление коэффициентов характеристического уравнения.

Использование свойства обратной симметрии элементов МПС (4) в случае прямого развертывания характеристического многочлена позволяет уменьшить количество слагаемых при вычислении коэффициентов.

2.1 Уравнение N=3 ($A_3\lambda^3 + B_3\lambda^2 + C_3\lambda + D_3 = 0$).

Коэффициенты: $A_3 = 1; B_3 = -3; C_3 = 0; D_3 = 2 - a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{31}$.

Коэффициенты A_3 и B_3 – являются константами и присваиваются 1 раз для всей выборки; $C_3 = 0$ – не учитывается при вычислении значений. В коэффициенте D_3 элементы $a_{13}a_{21}a_{32}$ и $a_{12}a_{23}a_{31}$ – являются обратно-симметричными $a_{13}a_{21}a_{32} = 1/(a_{12}a_{23}a_{31})$, однако хранение произведения требует дополнительной ячейки памяти и операции присвоения поэтому нецелесообразно.

2.2 Уравнение N=4 ($A_4\lambda^4 + B_4\lambda^3 + C_4\lambda^2 + D_4\lambda + E_4 = 0$)

Коэффициенты: $A_4 = 1; B_4 = -4; C_4 = 0;$

$$D_4 = 8 - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{24}a_{41} - a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{34}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{42} - a_{14}a_{31}a_{43} - \\ - a_{23}a_{34}a_{42} - a_{24}a_{32}a_{43};$$

$$E_4 = -2 + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{12}a_{24}a_{41} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{34}a_{41} + a_{14}a_{21}a_{42} + a_{14}a_{31}a_{43} + \\ + a_{23}a_{34}a_{42} + a_{24}a_{32}a_{43} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - \\ - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}.$$

Вычисление коэффициентов D_4 и E_4 требует соответственно:

– D_4: 8 операций «+», «–»; 16 операций «*», «/»;

– E_4: 14 операций «+», «–»; 34 операций «*», «/».

Запишем порядок вычисления D_4 и E_4 следующим образом:

$$D_4 = 8 - a_{12}(a_{23}a_{31} + a_{24}a_{41}) - a_{13}(a_{21}a_{32} + a_{34}a_{41}) - a_{14}(a_{21}a_{42} + a_{31}a_{43}) - \\ - a_{23}a_{34}a_{42} - a_{24}a_{32}a_{43};$$

$$E_4 = 6 - D_4 - a_{12}(a_{23}a_{34}a_{41} + a_{24}a_{31}a_{43}) - a_{13}(a_{21}a_{34}a_{42} + a_{24}a_{32}a_{41}) -$$
$$- a_{14}(a_{21}a_{32}a_{43} + a_{23}a_{31}a_{42}).$$

В этом случае, вычисление коэффициентов D_4 и E_4 требует соответственно:

– D_4: 8 операций «+», «–»; 13 операций «*», «/»;

– E_4: 7 операций «+», «–»; 15 операций «*», «/».

3.Метод Ньютона

Вычисление $\lambda_{\max}$ сводиться к нахождению корня характеристического уравнения с использованием в качестве стартовой точки x_0 значения, которое определяется одним из утверждений теоремы Фробениуса – Перрона [2]:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad x_0 = \max_i \sum_j a_{ij} \geq \lambda_{\max}. \tag{5}$$

Уменьшение вычислительной сложности на данном этапе связано с: поиском более точных значений x_0, чем в (5); методов, имеющих более высокую скорость сходимости в окрестностях корня, учитывающих особенности характеристического уравнения; порядком вычисления значений $f(x_{n-1})$ и $f'(x_{n-1})$.

Рассмотрим порядок вычислений на примере характеристического уравнения N=4:

$$f(x) = A_4x^4 + B_4x^3 + C_4x^2 + D_4x + E_4 = x^4 - 4x^3 + D_4x + E_4.$$

При наличии в составе вычисляемой функции целых степеней невысокого порядка более эффективным, является не использование функции возведения в степень, а непосредственное представление степени в виде произведения:

$$f(x) = x \cdot x \cdot x \cdot x - 4 \cdot x \cdot x \cdot x + D_4 \cdot x + E_4.$$

В этом случае, вычисление значения функции требует: 3 операции «+», «–»; 7 операций «*», «/».

Изменим порядок следующим образом:

$$f(x) = x \cdot (x \cdot x \cdot (x - 4) + D_4) + E_4,$$

что потребует 3 операции «+», «–» и 3 операции «*», «/».

Выводы. Рассмотренные приемы позволяют существенно уменьшить вычислительную сложность алгоритма нахождения ИСС. Способы организации вычислений в п.2 и п.3 хотя и дают выигрыш всего в несколько операций, однако при большом количестве МПС (табл. 1) существенно снижают время расчетов в абсолютном измерении. Данные подходы могут применяться и к другим, сходным задачам для повышения эффективности работы алгоритмов.

Литература

1. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. –

М.: «Радио и связь», 1993. – 278 с.

2. Панкратова Н.Д. Моделі і методи аналізу ієрархій. Теорія. Застосування: навч. посібник / Н.Д. Панкратова, Н.І. Недашковська. – К. : ІВЦ Видавництво «Політехніка», 2010. – 372 с.
3. Попович Е.С. Особенности определения индекса случайной согласованности в методе анализа иерархий (МАИ) / А.Д. Финогенов, П.Л. Литвиненко, Е.С. Попович // «Прикладна геометрія, дизайн та об'єкти інтелектуальної власності»: 3-я міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених, 22-23 квітня 2014, Київ: матеріали. – К., 2014. – С. 205–210.
4. Данилина Н.И. Численные методы : Учебник для техникумов / [Н.И. Данилина, Н.С. Дубровская, О.П. Кваша и др.]. – М. : «Высш. школа», 1976. – 368 с.

ЗМЕНШЕННЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ СКЛАДНОСТІ ПРИ ОБРАХУНКУ ІНДЕКСУ ВИПАДКОВОЇ УЗГОДЖЕНОСТІ

Захарчук Н.Г., Коперсак В.М., Ладогубець Т.С., Фіногенов О.Д.

В роботі розглянуті особливості безпосереднього обчислення індексу випадкової узгодженості для обернено-симетричних матриць, що отримуються внаслідок парних порівнянь альтернатив. Наведено способи зменшення обчислювальної складності алгоритмів обрахунку.

Ключові слова: обернено-симетричні матриці, парне порівняння альтернатив, метод аналізу ієрархій, індекс випадкової узгодженості, обчислювальна складність.

LESSENING OF THE COMPUTATIONAL COMPLEXITY OF RANDOM INDEX CALCULATION

Zakharchuk N., Kopersak V., Ladogubets T., Finogenov O.

In the paper, the features of the direct calculation of a random index for inverse-symmetrical matrices obtained as a result of the paired comparison of alternatives are being considered. The ways to decrease the computational complexity of calculation algorithms are given.

Key words: inverse-symmetrical matrices, pair-wise comparison, Analytic Hierarchy Process, random index, computational complexity.