

УДК 514.18

ТАНГЕНЦИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ КРИВОЙ НА СТОРОНЫ СИМПЛЕКСА

Найдыш А.В. д.т.н.,

Бездитный А.А., к.т.н.

*Мелитопольская школа прикладной геометрии,**Мелитопольский педагогический университет им. Б. Хмельницкого
(Украина)*

В статье рассматривается способ определения кривой множеством её касательных.

Ключевые слова: тангенциальное отображение, касательная, локальный симплекс, производная кривой.

Постановка проблемы. На пути исследования свойств и способов построения сопровождающих кривых, мы столкнулись с задачей реализации различных способов задания плоских и пространственных кривых линий. Одними из первых рассматриваемых задач стали: задание кривой её тангенциальными отображениями на стороны симплекса и множеством касательных. Первая задача была решена в терминах точечного исчисления - было получено уравнение кривой, заданной её тангенциальными отображениями [1].

Анализ последних исследований и публикаций. В работе [1] рассматривался способ задания кривой при помощи её тангенциальных отображений на стороны симплекса, а работа [2] содержит опорные сведения о производной кривой и способах её задания и построения. Таким образом, располагая уравнениями из этих двух источников, мы можем перейти к определению кривой множеством её касательных.

Формулирование целей статьи. Задать кривую множеством её касательных, а также из полученного уравнения – вернуться к классическому уравнению кривой в точечном представлении.

Основная часть. Пусть в симплексе $СAB$ задана кривая (рис.1):

$$M = A - C p + B - C q + C. \quad (1)$$

Тогда касательную к кривой M , в ее текущей точке, можно определить уравнением:

$$N = A - C (p + p) + B - C (q + q) + C. \quad (2)$$

Касательная пересекает стороны AC и CB в точках P и Q :

$$P = A - C u + C; Q = B - C v + C. \quad (3)$$

Определим параметры u и v . Так как точки P, Q, N принадлежат одной прямой, то определитель, составленный из коэффициентов при координатах точек симплекса из (2) и (3), будет равен 0:

$$\begin{array}{ccc|ccc} u & 0 & 1 & u & 0 & 1 \\ p & q & 1 & p & q & 1 \\ p+p & q+q & 1 & p & q & 0 \\ & 0 & v & 1 & & \\ & p & q & 1 & & \\ & p & q & 0 & & \end{array} = 0 \rightarrow u = \frac{pq-qp}{q}; \quad (4)$$

$$= 0 \rightarrow v = -\frac{pq-qp}{p}.$$

Таким образом, мы доказали, что кривая (1), заданная в симплексе CAB , имеет тангенциальное отображение:

$$P = A - C \left(p - p \frac{q}{q} \right) + C \text{ -- на стороне } AC \text{ и}$$

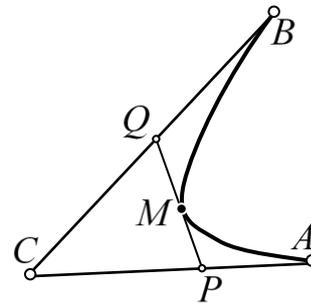
$$Q = B - C \left(q - q \frac{p}{p} \right) + C \text{ -- на стороне } CB.$$

Теперь рассмотрим обратную задачу: зададим в симплексе CAB следующие соотношения:

$$u = \frac{CP}{CA} = p - p \frac{q}{q};$$

$$v = \frac{BQ}{BC} = q - q \frac{p}{p}.$$

(5) Рис. 1. Касательная к кривой



Принимая P и Q в качестве тангенциальных отображений некоторой кривой, определим уравнение этой кривой:

$$P = A - C \frac{f}{q} + C, Q = B - C \frac{f}{p} + C, \text{ где } f = pq - qp. \quad (6)$$

Определим отношение $w = \frac{PM}{PQ}$ для определения кривой M . Из [1] известно, что при заданных тангенциальных отображениях P, Q, w выражается соотношением:

$$w = \frac{uv}{uv + uv}. \quad (7)$$

Из (6) определим функции параметров и их производные:

$$u = \frac{f}{q}; u' = -\frac{fq-fq}{q^2}; v = -\frac{f}{p}; v' = -\frac{fp-fp}{p^2}. \quad (8)$$

Подставим (8) в (7) и преобразуем:

$$w = \frac{-\frac{fq-fq}{q^2} \cdot \left(-\frac{f}{p}\right)}{-\frac{fq-fq}{q^2} \cdot \left(-\frac{f}{p}\right) - \frac{fp-fp}{p^2} \cdot \frac{f}{q}} = -\frac{qp}{f} = -\frac{qp}{pq-qp}. \quad (9)$$

Учитывая, что $M = Q - P w + P$, после подстановки значений Q, P, w , из (6) и (9) получим:

$$\begin{aligned}
 M = & -B - C \frac{pq - qpf}{p} + C - A - C \frac{pq - qp}{q} - C \times \\
 & \times - \frac{qp}{pq - qp} + A - C \frac{pq - qp}{q} + C = \\
 & = A - C p + B - C q + C.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Выводы. Таким образом, мы доказали, что тангенциальные отображения (6) однозначно определяют кривую (1). Справедливо прямое и обратное утверждение, что позволяет говорить о том, что получен способ задания одной и той же кривой множеством точек M и множеством касательных PQ . В дальнейшем планируется рассмотреть тангенциальные отображения для частных случаев отдельных кривых, а также перейти к отображениям на грани пространственного симплекса.

Литература

1. Найдыш А.В. Задание кривой её тангенциальными отображениями на стороны симплекса / А.В. Найдыш, А.А. Бездитный // Современные проблемы моделирования: сборник научных трудов / МГПУ им. Б. Хмельницкого. – Мелитополь: Издательство МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2016. – Вып. 5. – с. 84-87.
2. Балюба І.Г. Похідна кривої та прямокутна сітка на поверхні / І.Г. Балюба, І.П. Давиденко // Праці Таврійської державної агротехнологічної академії. – Мелітополь: ТДАТА, 2003. – Вип.4: Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т19. – с.45-48.

ТАНГЕНЦІАЛЬНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ КРИВОЇ НА СТОРОНИ СИМПЛЕКСА

Найдиш А.В., Бездінний А.О.

У статті розглядається спосіб визначення плоскої кривої її тангенціальними відображеннями.

Ключові слова: тангенціальне відображення, дотична, локальний симплекс, похідна кривої.

TANGENTIAL DISPLAY OF THE CURVE TO THE SIMPLEX

Naydysh A., Bezditniy A.

This article considers the method of determining a curve by the set of its tangents.

Keywords: tangential mapping, tangent, local simplex, derivative of the curve.