УДК 514.18

ПЕРЕТВОРЕННЯ КОНУСА В ЦИКЛІДУ ДЮПЕНА ІЗ ЗБЕРЕЖЕННЯМ ІЗОМЕТРИЧНИХ КООРДИНАТ

Пилипака С.Ф., д.т.н.,
Грищенко І.Ю., к.т.н.,
Несвідоміна О.В., аспірант*
Національний університет біоресурсів і природокористування України (м. Київ, Україна)

В роботі розглянуто перетворення конуса, віднесеного до ізометричних координат, за допомогою інверсії. На отриманій поверхні – цикліді Дюпена – зберігається ізометрична сітка координатних ліній. Це аналітично підтверджено коефіцієнтами першої квадратичної форм поверхні. Побудовано цикліди різної форми в залежності від положення вершини конуса по відношенню до полюса інверсії.

Ключові слова: ізометричні координати, конус, цикліди Дюпена, перетворення інверсії.

Постановка проблеми. Тільки обмежений клас поверхонь можна віднести до ізометричних координат. Це мінімальні поверхні, деякі поверхні обертання, циліндри, у яких крива поперечного перерізу може бути аналітично описана у функції довжини дуги. Відомо, що при інверсії поверхні сітка ліній кривини перетворюється в аналогічну сітку на новій поверхні. При цьому ізометрична сітка після перетворення теж залишається ізометричною. Таким чином можна розширити клас поверхонь, віднесених до ізометричних координат.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Якщо поверхня віднесена до ізометричної сітки координатних ліній, то це спрощує процес відображення на неї плоских зображень аналітичним шляхом. Про відображення написів на ізометричні сітки йдеться в роботі [1]. В працях [2] розглянуто відшукання ізометричних сіток на деяких поверхнях обертання а також їх аналітичний пошук. Відображення зображення із плоскої на просторову ізометричну сітку є конформним, що показано в праці [3].

Формулювання цілей статті. Отримати аналітичний опис і побудувати цикліди Дюпена, віднесені до ізометричних координат, за допомогою перетворення інверсією поверхні конуса.

Основна частина. Параметричні рівняння конуса, віднесеного

---

* Науковий керівник – д.т.н., професор Пилипака С.Ф.

до ізометричних координат, мають вигляд:

$$X = e^{u\cos\beta}\cos\beta\cos v;$$
$$Y = e^{u\cos\beta}\cos\beta\sin v; \qquad (1)$$
$$Z = e^{u\cos\beta}\sin\beta,$$

де u, v – незалежні змінні поверхні;

β – кут нахилу прямолінійних твірних конуса до горизонтальної площини.

Інверсію конуса здійснимо за допомогою сфери одиничного радіуса. Параметричні рівняння цикліди в загальному випадку запишуться:

$$X_Ц = \frac{X+a}{X^2+Y^2+Z^2};\ Y_Ц = \frac{Y}{X^2+Y^2+Z^2};\ Z_Ц = \frac{Z+h}{X^2+Y^2+Z^2}, \qquad (2)$$

де a – стала величина, яка задає зміщення осі вихідної поверхні (конуса (1)) відносно центру сфери; h – зміщення вершини конуса по висоті відносно центру сфери (рис. 1).

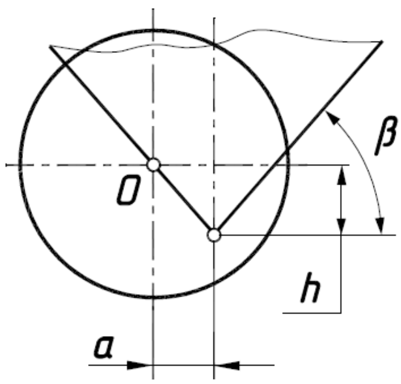


Рис. 1. Зміщення вершини конуса відносно полюса O інверсії

Після підстановки (1) в (2) і спрощень отримаємо параметричні рівняння цикліди:

$$X_Ц = \frac{e^{u\cos\beta}\cos\beta\cos v + a}{ZN};$$
$$Y_Ц = \frac{e^{u\cos\beta}\cos\beta\sin v}{ZN}; \qquad (3)$$
$$Z_Ц = \frac{e^{u\cos\beta}\sin\beta + h}{ZN},$$

де $ZN = a^2 + h^2 + e^{2u\cos\beta}\cos\beta + 2e^{u\cos\beta}\left(a\cos\beta\cos v + h\sin\beta\right).$

Покажемо, що поверхня (3) теж віднесена до ізометричної сітки координатних ліній. Для цього потрібно знайти частинні похідні і коефіцієнти першої квадратичної форми. В зв’язку із тим, що частинні похідні мають дуже громіздкий вигляд (вони отримані за допомогою символьної алгебри програмного продукту «Mathematica»), їх наводити не будемо, а наведемо готові коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$E = \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2 = \frac{e^{2u\cos\beta}\cos^2\beta}{ZN^2};$$
$$F = \frac{\partial X}{\partial u}\cdot\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\cdot\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\cdot\frac{\partial Z}{\partial v} = 0; \qquad (4)$$
$$G = \left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial s}\right)^2 = \frac{e^{2u\cos\beta}\cos^2\beta}{ZN^2}.$$

Перший і третій коефіцієнти (5) рівні між собою, а середній дорівнює нулю. Отже, поверхня цикліди віднесена до ізометричних координат.

Форма поверхні (3) залежатиме від сталих a і h, а також від кута β нахилу твірних конуса. При $a=h=0$ (випадок, коли вершина конуса збігається із полюсом O інверсії) ми отримаємо конус. Це пояснюється тим, що при інверсії всі прямі, що проходять через полюс, перетворюються у прямі. Щоправда, його параметричні рівняння відрізнятимуться від рівнянь (1), а саме перед показником степеня стоятиме знак «-», тобто «$-u\cos\beta$». При $u=0$ на обох конусах (вихідного і перетвореного) буде описане коло – лінія перетину обох конусів із сферою інверсії, оскільки точки, що розташовані на сфері, при інверсії переходять самі в себе. Крім того, якщо точки вихідної поверхні знаходяться зовні сфери, то після перетворення вони будуть всередині і навпаки. Отже, напрям відліку точок вздовж прямолінійних твірних вихідного і перетвореного конуса буде протилежний.

При $a=0$, $h\neq0$ утвореною поверхнею буде поверхня обертання. На рис. 2,а за рівняннями (3) побудовано відсік поверхні при $h=1$, а на рис. 2,б – при $h=-1$. Всі вони віднесені до ізометричної сітки координатних ліній із меридіанів і паралелей.

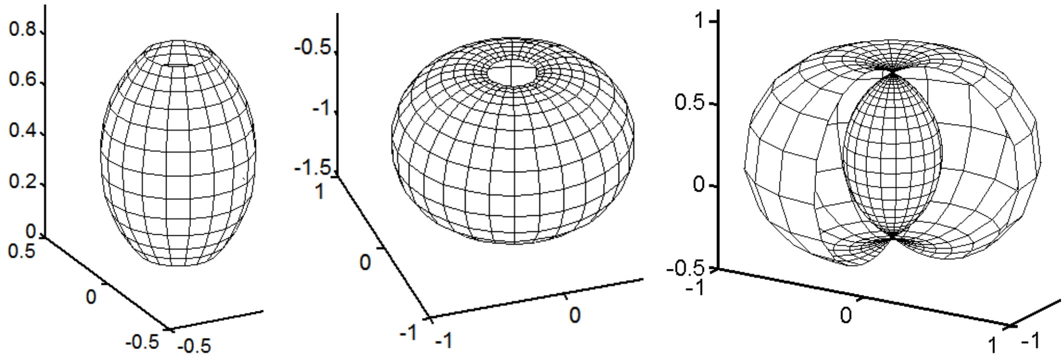


Рис. 2. Поверхні обертання, побудовані за рівняннями (3) при $\beta=30^0$ і $a=0$: а) $h=1$; б) $h=-1$; в) $h\pm1$

Поверхні, зображені на рис. 2,а і 2,б, не є цілісним зображенням інверсії конуса, а тільки окремими відсіками. Цілісним зображенням інверсії обох порожнин конуса є поверхня, представлена на рис. 2,в. В силу специфіки перетворення інверсії ця поверхня будується у два етапи: перший етап – при $h=1$, другий етап – при $h=-1$ і зміні знака в останньому рівнянні (3) на протилежний, тобто $X_Ц=-\left(e^{u\cos\beta}\cos\beta\cos v+a\right)/ZN$. Щоб отримати цілісне зображення перетворення конуса при $a\neq0$ нами теж буде проведена побудова у два етапи. На рис. 3 показано вигляди та аксонометрію поверхні при $h=0$, $a=1$, $\beta=60^0$.

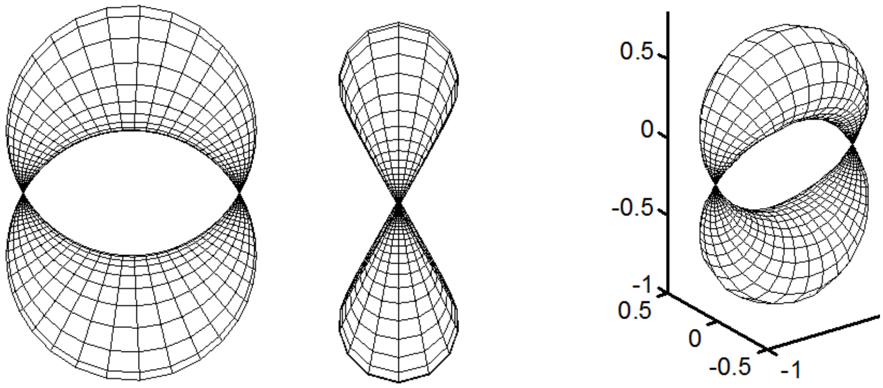
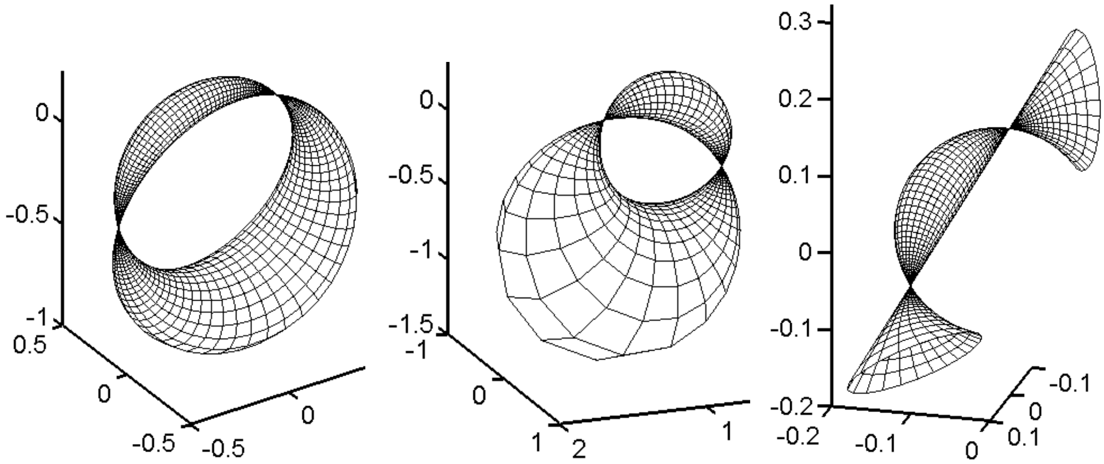


Рис. 3. Вигляди та аксонометрія поверхні при $h=0$, $a=1$, $\beta=60^0$

При $h\neq0$ і $a\neq0$ порожнини циклiди не є рівними (рис. 4,а,б). На увагу заслуговує випадок, коли вершина конуса зміщена відносно полюса інверсії таким чином, що одна його твірна проходить через полюс (рис. 1). Тоді ця твірна залишається прямолінійною і на циклiдi (рис. 4,в). Щоб отримати цей випадок, потрібно встановити взаємозв’язок між сталими a і h у вигляді: $h=a\mathrm{tg}\beta$.



а б в

Рис. 4. Циклiди, побудовані за рівняннями (3): при $\beta=30^0$ і $a=0$:
а) $a=1$; $h=1$; $\beta=75^0$; б) $a=1$; $h=0{,}5$; $\beta=60^0$; в) $a=2$; $h=3{,}46$; $\beta=60^0$

Висновки. Таким чином, рівняння (3) описують широкий спектр циклiд, віднесених до ізометричних координат, форма яких залежить від положення вершини вихідного конуса відносно полюса інверсії та кута β нахилу його прямолінійних твірних.

Література

1. Кремець Т.С. Конформне відображення написів на ізометричні сітки конуса та кулі / Т.С. Кремець // Технічна естетика і дизайн. – К.: Віпол, 2011. – Вип. 9. – С. 112–117.

2. Кремець Т.С. Відшукання ізометричних сіток на деяких поверхнях обертання / Т.С. Кремець // Тези доповідей І-ї конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Прикладна геометрія, дизайн та інноваційна діяльність». – К.: НТУУ «КПІ», 2012. – Вип. 1. – С. 82 – 84.
3. Кремець Т.С. Конформне перетворення плоских зображень із дуг кіл шляхом нанесення їх на різні ізометричні сітки / Т.С. Кремець // Матеріали II-ї Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Прикладна геометрія, дизайн та об'єкти інтелектуальної власності». – Вип. 2. – К.: ДІЯ, 2013. – С. 126 – 130.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОНУСА В ЦИКЛИДУ ДЮПЕНА С СОХРАНЕНИЕМ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

Пилипака С.Ф., Грищенко И.Ю., Несвидомина А.В.

В работе рассмотрено преобразование конуса, отнесенного к изометрическим координатам, с помощью инверсии. На полученной поверхности – циклиде Дюпена – сохраняется изометрическая сеть координатных линий. Это аналитически подтверждено коэффициентами первой квадратичной формы поверхности. Построены циклиды различной формы в зависимости от расположения вершины конуса по отношению к полюсу инверсии.

Ключевые слова: изометрические координаты, конус, циклиды Дюпена, преобразование инверсии.

THE TRANSFORMATION OF A CONE INTO CYCLIDE DUPIN OF PRESERVING ISOMETRIC COORDINATES

Pylypaka S., Grischenko I., Nesvidomina A.

The paper discusses the transformation of a cone, related to isometric coordinates by using the inversion. The obtained surface – cyclide Dupin retains the isometric network coordinati lines. This is analytically confirmed by the coefficients of the first quadratic form of the surface. Built cyclide different forms depending on the location of the vertex of the cone relative to the pole of the inversion.

Keywords: isometric coordinates, cone, cyclide Dupin, the transformation of inversion.